জ্যামিতি প্রবেশ

Approved by the Board of Secondary Education, West Bengal, as a Text-Book for Classes VII & VIII, Vide Notification No. Syl. 64/54, dated 27-11-54. (Calcutta Gazette, dated 9-12-54.)

জ্যামিতি-প্রবেশ

[প্রথম ও দ্বিতীয় খণ্ড]

● সপ্তম ও অষ্টম শ্রেণীর জন্য ●

[মধ্যশিক্ষা পর্ষৎ-এর নূতন পাঠ্যসূচী অনুসারে লিখিত]

শ্রীকৃতান্তকুমার বসু, এম. এ., বি. এল.
বহরমপুর কৃষ্ণনাথ কলেজের গণিতের অধ্যাপক ;
শ্রীজিতেন্দ্রচন্দ্র মুখোপাধ্যায়, এম. এস-সি.
ভূতপূর্ব শিক্ষক, জলপাইগুড়ি ফণীন্দ্রদেব বিদ্যালয়
ও
শ্রীনীলিমা মুখোপাধ্যায়, বি. এস-সি.
কাশিমবাজার বালিকা বিদ্যালয়ের শিক্ষিকা

এ. মুখার্জী অ্যাণ্ড কোং প্রাইভেট লিঃ :: কলিকাতা-১২

প্রকাশক—শ্রীঅমিয়রঞ্জন মুখোপাধ্যায়
ম্যানেজিং ডিরেক্টার
এ. মুখার্জী অ্যাণ্ড কোং প্রাইভেট লিমিটেড
২ কলেজ স্কোয়ার, কলিকাতা—১২

চ তু র্থ সং স্ক র ণ
মূল্য টা. ২·১৩ ন. প. মাত্র

মুদ্রাকর : শ্রীবিভূতিভূষণ রায়
বিদ্যাসাগর প্রিন্টিং ওয়ার্কস
১৩৫-এ, মুক্তারাম বাবু স্ট্রীট,
কলিকাতা-৭

ভূমিকা

পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষৎ কর্তৃক নির্দিষ্ট জ্যামিতির পাঠ্যসূচী নূতন পরিকল্পনায় রচিত হইয়াছে। এই পাঠ্যসূচী অনুসরণ করিলে জ্যামিতি শিক্ষার প্রচলিত ধারা পরিবর্তিত হইবে। এতাবৎকাল আমাদের দেশে মাধ্যমিক বিদ্যালয়ে জ্যামিতি পঠন ও পাঠনের যে প্রণালী অনুসৃত হইত তাহাতে প্রাথমিক পর্যায়েই যুক্তিশাস্ত্রের উপর ভিত্তি করিয়া জ্যামিতিক তত্ত্বগুলি প্রতিষ্ঠা করা যাইত। যুক্তির জটিলতায় প্রবেশ করিতে অক্ষম বলিয়া ইহাতে অধিকাংশ শিক্ষার্থীরই জ্যামিতির জ্ঞান মুখস্থ বিদ্যাতে পর্যবসিত হইত। নূতন পাঠ্যসূচীতে যুক্তির উপর প্রতিষ্ঠিত জ্যামিতিক তত্ত্ব শিখাইবার পূর্বে প্রথম শিক্ষার্থীকে প্রয়োগ ও পরীক্ষামূলক পদ্ধতিতে জ্যামিতির সত্যগুলির সহিত পরিচিত করাইবার পরিকল্পনা করা হইয়াছে।

নবপাঠ্যসূচীর অনুসরণে রচিত এই পুস্তকে সপ্তম মানের জন্য নির্দিষ্ট পাঠ্যাংশে ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ এবং অষ্টম মানের পাঠ্যাংশে বৃত্ত-বিষয়ক প্রধান প্রধান তত্ত্বগুলি পরীক্ষামূলক বা ব্যবহারিক পদ্ধতিতে শিখাইবার প্রণালী সন্নিবেশিত হইয়াছে। এইগুলি অনুধাবন করিলে প্রথম শিক্ষার্থীরা জটিল যুক্তির ভিতরে প্রবেশ না করিয়াও জ্যামিতিক বহুবিধ সত্যের সহিত পরিচিত হইবে এবং সহজসাধ্য অনুশীলনীতে এই সকল তত্ত্বের প্রয়োগ করিয়া ইহাদের প্রকৃত রূপ উপলব্ধি করিতে পারিবে।

অঙ্কনাদি বা সম্পাদ্যবিষয়ক ব্যাপারেও এই একই পদ্ধতির অনুসরণে গোড়াতেই প্রমাণাদি সন্নিবেশ না করিয়া প্রথমে কেবল যান্ত্রিক অঙ্কনপদ্ধতি দেখান হইয়াছে।

এই পুস্তকে সপ্তম মানের অংশে আলোচ্য বিষয়ের ইংরাজী সংজ্ঞা সর্বত্র দেওয়া হয় নাই। প্রথম শিক্ষার্থীদের ইংরাজী সংজ্ঞা শিখিবার অত্যাবশ্যকতা আছে বলিয়া মনে হয় না, কারণ সপ্তম মানে অধীত সকল বিষয়ই পুনরায় পরবর্তী মানে পড়িতে হইবে। পরবর্তী অংশে সর্বত্র ইংরাজী সংজ্ঞা দেওয়া হইয়াছে। বর্তমান অবস্থায় পঞ্চম মান হইতে শিক্ষার্থীদের ইংরাজী পাঠের সূচনা হয়, সেজন্য সপ্তম মানের ছাত্র-ছাত্রীদের ইংরাজী জ্ঞান খুব বেশী হওয়া সম্ভব নয় বলিয়াও সপ্তম মানে ইংরাজী সংজ্ঞা যথাসম্ভব কম দেওয়া হইয়াছে।

নবপাঠ্যসূচী সফল ও সর্বথা উপযোগী করিয়া তুলিবার জন্য শিক্ষক-শিক্ষিকাগণকে বিশেষ যত্নবান হইতে হইবে, নূতন ধারা প্রবর্তনের বাধা ও অসুবিধা দূর করিবার ভার সম্পূর্ণরূপে তাঁহাদিগকেই গ্রহণ করিতে হইবে। এই পুস্তক এই কার্যে শিক্ষক-শিক্ষিকা ও শিক্ষার্থীদিগকে সাহায্য করিলে গ্রন্থকারগণ কৃতার্থ হইবেন।

সূচীপত্র

—সপ্তম শ্রেণীর পাঠ্য—

প্রথম খণ্ড

* * * *

—অষ্টম শ্রেণীর পাঠ্য—

দ্বিতীয় খণ্ড

প্রথম খণ্ড

উপক্রমণিকা

জ্যামিতির মূল তথ্য ও সংজ্ঞা

জ্যামিতি

গণিতশাস্ত্রের যে শাখায় বস্তুদ্বারা অধিকৃত স্থানের আকৃতি, আয়তন ইত্যাদি আলোচনা করা হয় উহাকে **জ্যামিতি (Geometry)** বলে।

ঘন, তল, রেখা ও বিন্দু

বস্তুমাত্রেই খানিকটা স্থান অধিকার করিয়া থাকে। কোন বস্তুর অধিকৃত স্থানটুকুর নাম জ্যামিতিক **ঘন (Solid)**। বস্তুর অধিকৃত স্থানকে পরিমাপ করিতে গেলে উহার **দৈর্ঘ্য (Length), বিস্তার** বা **প্রস্থ (Braedth)** এবং **বেধ (Thickness)** পৃথকভাবে বিবেচনা করিতে হয়। এই তিনটি মাপকে **মাত্রা (Dimension)** বলা হইয়া থাকে। **ঘন বস্তু ত্রিমাত্রিক।**

যাহাদ্বারা ঘন সীমাবদ্ধ হয় তাহার নাম **তল (Surface)**। **তলের দৈর্ঘ্য ও বিস্তার আছে কিন্তু বেধ নাই। তল দ্বিমাত্রিক।**

যাহাদ্বারা তল সীমাবদ্ধ হয় অথবা দুই তল পৃথক হইয়া যেখানে পরস্পরকে ছেদ করে উহার নাম **রেখা (Line)**। **রেখার দৈর্ঘ্য আছে কিন্তু বিস্তার বা বেধ নাই। রেখা এক-মাত্রিক।**

যাহাদ্বারা রেখা সীমাবদ্ধ হয় তাহাকে **বিন্দু (Point)** বলে কিংবা দুই রেখা পরস্পরকে ছেদ করিলে সেখানে বিন্দু নির্দিষ্ট হয়। বিন্দুর কোন পরিমাপ সম্ভব নহে। **বিন্দুর অবস্থান আছে কিন্তু মাত্রা নাই।**



উপরি-উক্ত আলোচনায় আমরা দেখিতেছি ঘন হইতে তল, তল হইতে রেখা, রেখা হইতে বিন্দুর উৎপত্তি হইয়াছে। ঘন বস্তুর বহিরাবরণ তল, তলের সীমা রেখা, রেখার সীমা বিন্দু। আবার বিন্দু হইতে আরম্ভ করিয়া আমরা ঘনতে উপনীত হইতে পারি। একটি গতিশীল বিন্দু রেখা উৎপন্ন করে, একটি গতিশীল রেখা হইতে তল এবং একটি গতিশীল তল হইতে ঘন উৎপন্ন হয়।

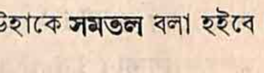


রেখা সরল কিংবা বক্র হইতে পারে। একটি গতিশীল বিন্দু যদি ক্রমাগত একই দিকে চলিতে থাকে তবে যে রেখার উৎপত্তি হয় উহা **সরলরেখা (Straight line)**। পক্ষান্তরে, যদি গতিশীল বিন্দু দিক পরিবর্তন করিয়া চলে তবে উহার গতিপথদ্বারা **বক্ররেখা (Curved line)** উৎপন্ন হয়।

তল সমতল (plane surface) কিংবা বক্রতল (curved surface) হইতে পারে। তলের উপরে যে-কোন দুই বিন্দু যুক্ত করিলে যে সরলরেখা উৎপন্ন হয় উহা সর্বাংশে তলের সঙ্গে মিশিয়া গেলে উহাকে **সমতল** বলা হইবে।

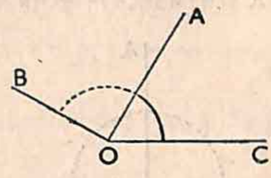
সমান্তরাল সরলরেখা

একই সমতলে অবস্থিত যেসকল সরলরেখাকে উভয়দিকে যথেচ্ছা বাড়াইয়া দিলেও উহারা কোন বিন্দুতেই পরস্পরের সঙ্গে মিলিত হয় না, তাহাদিগকে **সমান্তরাল (Parallel)** সরলরেখা বলে।



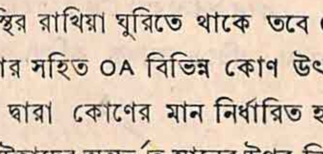
কোণ (Angle)

দুই সরলরেখা কোন বিন্দুতে মিলিত হইলে সেখানে কোণ উৎপন্ন হইয়া থাকে। রেখা দুইটিকে কোণের **বাহু (Arm)** বা ভুজ এবং উহাদের মিলন-বিন্দুকে কোণের **শীর্ষ** বা **শীর্ষবিন্দু (Vertex)** বলা হয়।



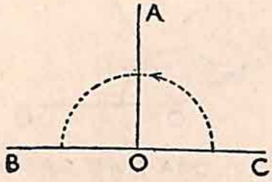
OA সরলরেখা OC এবং OB সরলরেখার সহিত O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। এখানে OA রেখার উভয় দিকে দুইটি কোণ উৎপন্ন হইয়াছে। OA, OC বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণকে AOC (বা COA) এবং OA, OB বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণকে AOB (বা BOA) বলিয়া নির্দেশ করা হইয়া থাকে।

সন্নিহিত কোণ (Adjacent angles) : দুই কোণের একটি সাধারণ বাহু থাকিলে এবং কোণদ্বয় সাধারণ বাহুর বিপরীত দিকে অবস্থিত হইলে উহাদিগকে সন্নিহিত কোণ বলা হইয়া থাকে। উপরের চিত্রে প্রদর্শিত AOC, AOB কোণদ্বয় পরস্পরের সন্নিহিত কোণ।



কোণের মান নির্ধারণ করার জন্য উহার উৎপত্তি অন্যভাবে কল্পনা করা হইয়া থাকে। ধর, OA সরলরেখা BOC সরলরেখার OC অংশের সঙ্গে মিশিয়া রহিয়াছে। OA রেখা যদি প্রান্তবিন্দু O স্থির রাখিয়া ঘুরিতে থাকে তবে OC এবং OA রেখার বিভিন্ন অবস্থানে OC রেখার সহিত OA বিভিন্ন কোণ উৎপন্ন করিবে। এই প্রকার ঘূর্ণনের পরিমাণ দ্বারা কোণের মান নির্ধারিত হয়। কোণের মান উহার বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য কিংবা উহাদের অন্তর্ভূত স্থানের উপর নির্ভর করে না। ঘূর্ণনের পরিমাণ বিচার করিয়া কোণের শ্রেণীবিভাগ ও বিভিন্ন নামকরণ হইয়া থাকে।

সরলকোণ (Straight angle) : পূর্ববর্তী চিত্রে OA, BC সরলরেখাদ্বয় একসঙ্গে মিশিয়া রহিয়াছে। প্রান্তবিন্দু O স্থির রাখিয়া OA রেখাকে ঘুরাইয়া যদি এমন অবস্থানে আনা যায় (OA′) যাহাতে উহা BC রেখার OB অংশের সঙ্গে C-এর বিপরীত দিকে পুনরায় মিশিয়া যায়, তবে OC এবং OA (নূতন অবস্থানে, অর্থাৎ OA′রূপে) সরলকোণ উৎপন্ন করিয়াছে বলা হইবে, অর্থাৎ COA′ কোণ সরলকোণ।



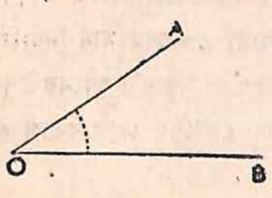
সমকোণ (Right angle) : OA, BC সরলরেখাদ্বয় এক সঙ্গে মিশিয়া ছিল ; O বিন্দু স্থির রাখিয়া OA রেখা ঘুরিতে ঘুরিতে যদি এমন অবস্থানে আসে যাহাতে সন্নিহিত কোণদ্বয় সমান হয় তবে সমকোণ উৎপন্ন হইবে। এই অবস্থানে OA, BC সরলরেখাদ্বয় পরস্পরের **লম্ব (Perpendicular)** হইবে। সমকোণকে **কোণ মাপিবার একক** হিসাবে ব্যবহার করা হইয়া থাকে এবং এজন্য সমকোণের একটি স্বতন্ত্র সংজ্ঞা দেওয়া হয়।

একটি সরলরেখার উপরে অপর একটি সরলরেখা দণ্ডায়মান হইলে যদি সন্নিহিত কোণদ্বয় পরস্পরের সমান হয় তবে ঐ কোণদ্বয়ের প্রত্যেকটি এক **সমকোণ।**

সমকোণের 90 ভাগের এক ভাগকে ডিগ্রী (°) বলা হয় ও ডিগ্রীকে 60 ভাগ করিলে মিনিট (′) এবং মিনিটকে 60 ভাগ করিলে সেকেণ্ড (″) পাওয়া যাইবে।

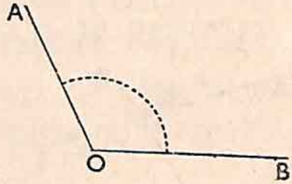
সমকোণের মাপে, **সরলকোণ = দুই সমকোণ = 180 ডিগ্রী।**

কোন সরলরেখা উহার একটি প্রান্তবিন্দু স্থির রাখিয়া কোন নির্দিষ্ট অবস্থান হইতে ঘুরিতে আরম্ভ করিয়া পুনরায় সেই অবস্থানে ফিরিয়া আসিলে চারি সমকোণ উৎপন্ন হয়।

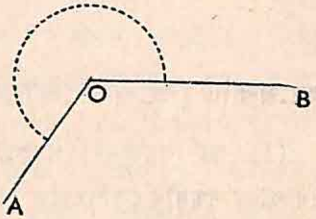


সূক্ষ্মকোণ (Acute angle) : সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কোণের নাম সূক্ষ্মকোণ।

স্থূলকোণ (Obtuse angle) ঃ এক সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু দুই সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কোণকে স্থূলকোণ বলে। পার্শ্ববর্তী চিত্রে অঙ্কিত ∠AOB = স্থূলকোণ।



প্রবৃদ্ধকোণ (Reflex angle) ঃ দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু চারি সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কোণকে প্রবৃদ্ধকোণ বলে।



ঘূর্ণনের পরিমাণ দ্বারা কোণের মান নির্ধারিত হয় ইহা মনে রাখিলে সহজেই বুঝা যাইবে যে কোন একটি কোণের পরিমাণ চারি সমকোণ অপেক্ষা বড়ও হইতে পারে।

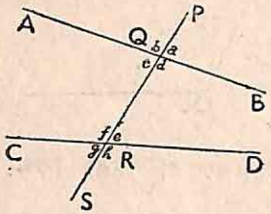
যদি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকের ঘূর্ণনে **ধনাত্মক** বা **পজিটিভ** (**Positive**) কোণ উৎপন্ন হইতেছে মনে করি তবে ঘড়ির কাঁটার সঙ্গে একই দিকে ঘূর্ণনে **ঋণাত্মক** বা **নেগেটিভ** (**Negative**) কোণ উৎপন্ন হইবে। জ্যামিতিক প্রয়োগে চারি সমকোণ অপেক্ষা বড় কোণ গণনা করা কিংবা কোণ ধনাত্মক বা ঋণাত্মক কিনা তাহা বিচার করা হয় না।

পূরক ও সম্পূরক কোণ

দুইটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ হইলে উহাদিগকে পরস্পরের **সম্পূরক** (**Supplement**) এবং কোণদ্বয়কে **সম্পূরক কোণ** (**Supplementary angles**) বলা হয়। দুই কোণের সমষ্টি এক সমকোণের সমান হইলে উহাদিগকে পরস্পরের **পূরক** (**Complement**) এবং কোণদ্বয়কে **পূরক কোণ** (**Complementary angles**) বলা হইবে।

ভেদক

যে সরলরেখা দুই বা ততোধিক রেখাকে ছেদ করে তাহাকে **ভেদক** (**Transversal**) বলে।



চিত্রে প্রদর্শিত AB, CD সরলরেখাদ্বয়ের ভেদক PQRS।

কয়েকটি বিশেষ কোণের নাম

(1) দুই সরলরেখা পরস্পরকে ছেদ করিলে উৎপন্ন কোণগুলির মধ্যে পরস্পরের সম্মুখীন কোণদ্বয়কে **বিপ্রতীপ কোণ** (**Vertically opposite angles**) বলে।

চিত্রে প্রদর্শিত PQB এবং AQR কোণদ্বয় **বিপ্রতীপ কোণ** এবং এইরূপ AQP, BQR বিপ্রতীপ কোণ।

(2) দুই সরলরেখা ও তাহাদের ভেদকদ্বারা আটটি কোণ উৎপন্ন হয়; উহাদের বিশেষ নাম দেওয়া হইয়া থাকে। চিত্রে প্রদর্শিত—

(ক) a, b, g, h কোণ **বহিঃকোণ** (**Exterior angles**)

(খ) c, d, e, f কোণ **অন্তঃকোণ** (**Interior angles**)

(গ) c, e কোণ **একান্তর কোণ** (**Alternate angles**); তদ্রূপ d, f কোণও একান্তর।

(ঘ) a এবং e, d এবং h, b এবং f, c এবং g **অনুরূপ কোণ** (**Corresponding angles**)।

মন্তব্য ঃ স্থূলকোণ, সূক্ষ্মকোন, প্রবৃদ্ধকোণ প্রভৃতির নামকরণ হইয়াছে কোণের মান অনুসারে এবং বিপ্রতীপ, একান্তর, অনুরূপ প্রভৃতি কোণের নামকরণ হইয়াছে কোণের অবস্থান অনুসারে।

ক্ষেত্র ও ক্ষেত্রফল

এক বা একাধিক রেখাদ্বারা সীমাবদ্ধ তলকে **ক্ষেত্র (Figure)** বলে। এই তল সমতল হইলে ক্ষেত্রের নাম হইবে **সামতলিক ক্ষেত্র (Plane figure)**। সরলরেখাদ্বারা সীমাবদ্ধ সামতলিক ক্ষেত্রের নাম **ঋজুরেখ ক্ষেত্র (Rectilineal figure)**। সীমাস্থিত সরলরেখাসমূহের প্রত্যেকটিকে ক্ষেত্রের **বাহু** বা **ভুজ (Side)** বলা হয়।

তিনটি সরলরেখাদ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে **ত্রিভুজ (Triangle)** বলা হয়। এরূপ ক্ষেত্র অবশ্যই সামতলিক ক্ষেত্র হইবে।

ঋজুরেখ ক্ষেত্রের বাহুর সংখ্যা তিনের বেশী হইলে সাধারণভাবে উহার নাম **বহুভুজ (Polygon)**। বাহুর সংখ্যানুযায়ী উহাদের বিশেষ নামকরণ হইয়া থাকে ; যথা—চতুর্ভুজ (Quadrilateral), পঞ্চভুজ (Pentagon), ষড়্‌ভুজ (Hexagon), সপ্তভুজ (Heptagon), অষ্টভুজ (Octagon) ইত্যাদি। বাহুগুলি সমান দীর্ঘ ও কোণগুলি সমান হইলে ক্ষেত্রটিকে **সুষম (Regular)** বলা হইবে। শুধু বাহু সমান হইলে ক্ষেত্রের নাম **সমবাহু (Equilateral)** ক্ষেত্র। যে ক্ষেত্রের কোণগুলি পরস্পর সমান উহাকে **সদৃশকোণ (Equiangular)** ক্ষেত্র বলা হয়।

সামতলিক ক্ষেত্রের বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের সমষ্টিকে **পরিসীমা (Perimeter)** বলা হয়।

ক্ষেত্রদ্বারা অধিকৃত স্থানের পরিমাণকে উহার **ক্ষেত্রফল (Area)** বলা হয়।

ত্রিভুজের শ্রেণীবিভাগ

যে ত্রিভুজের বাহুগুলি পরস্পর সমান উহা **সমবাহু (Equilateral) ত্রিভুজ**। যে ত্রিভুজের দুইটি বাহু পরস্পর সমান উহার নাম **সমদ্বিবাহু (Isosceles) ত্রিভুজ**। ত্রিভুজের বাহুগুলি পরস্পর অসমান হইলে উহাকে **বিষমবাহু (Scalene) ত্রিভুজ** বলা হয়।

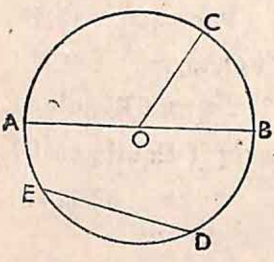
যে ত্রিভুজের একটি কোণ সমকোণ উহা **সমকোণী (Right-angled) ত্রিভুজ**। যে ত্রিভুজের একটি কোণ স্থূলকোণ উহা **স্থূলকোণী (Obtuse-**

angled) **ত্রিভুজ** এবং যে ত্রিভুজের সবগুলি কোণ সূক্ষ্মকোণ উহা **সূক্ষ্মকোণী** (Acute-angled) **ত্রিভুজ**।

বৃত্ত

যদি কোন সামতলিক ক্ষেত্র একটিমাত্র বক্ররেখাদ্বারা এরূপভাবে সীমাবদ্ধ থাকে যে উহার মধ্যস্থিত কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে বক্ররেখার প্রত্যেক বিন্দুটি সমদূরবর্তী, তাহা হইলে ক্ষেত্রটিকে **বৃত্ত** (Circle) বলে। এই নির্দিষ্ট বিন্দুকে বৃত্তের **কেন্দ্র** (Centre) এবং বক্ররেখাটিকে বৃত্তের **পরিধি** (Circumference) বলা হয়।

বৃত্তের পরিধির যে-কোন অংশকে **চাপ** (Arc) বলে।



কেন্দ্রগামী যে সরলরেখা পরিধিদ্বারা সীমাবদ্ধ তাহার নাম **ব্যাস** (Diameter)।

কেন্দ্র হইতে পরিধি পর্যন্ত অঙ্কিত সরলরেখার নাম **ব্যাসার্ধ** (Radius)।

সুতরাং ব্যাসের দৈর্ঘ্য ব্যাসার্ধের দ্বিগুণ। ব্যাস ও পরিধির অংশদ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে **অর্ধবৃত্ত** (Semi-circle) বলা হয়।

যে সরলরেখা পরিধির যে-কোন দুইটি বিন্দু যোগ করিয়া ঐ বিন্দুদ্বয়দ্বারা সীমাবদ্ধ হয় তাহাকে **জ্যা** (Chord) বলে।

চিত্রে প্রদর্শিত ACBD বৃত্তের কেন্দ্র O।

AB একটি ব্যাস, OC ব্যাসার্ধ।

BC একটি চাপ, ACB অর্ধবৃত্ত।

ED রেখা একটি জ্যা।

সামতলিক জ্যামিতি

জ্যামিতির যে শাখাতে কেবল একই সমতলস্থিত বিন্দু, রেখা ও তদুৎপন্ন ক্ষেত্রাদি বিষয়ে আলোচনা করা হয় উহা **সামতলিক জ্যামিতি** নামে পরিচিত।

সামতলিক ক্ষেত্র দ্বিমাত্রিক, কারণ উহার বেধ নাই। সেজন্য সামতলিক জ্যামিতিকে দ্বিমাত্রিক জ্যামিতিও বলা হয়। এই পুস্তকে সামতলিক জ্যামিতিই আলোচনা করা হইবে।

জ্যামিতিক পদ্ধতি

কোন জ্যামিতিক তত্ত্বের সত্যতা বিশেষ বিশেষ ক্ষেত্রে যন্ত্রের সাহায্যে মাপিয়া প্রমাণ করা যায়, কোন কোন ক্ষেত্রে সাধারণভাবে যুক্তির সাহায্যেও উহার সত্যতা সম্বন্ধে নিঃসন্দেহ হওয়া যায়।

জ্যামিতিক অঙ্কনাদিতে নিম্নোক্ত যন্ত্রগুলি ব্যবহার করা হইয়া থাকে—

(1) মাপনী (Ruler)

(2) কাঁটা কম্পাস (Dividers)

(3) পেন্সিল কম্পাস (Pencil Compasses)

(4) মাটাম বা ত্রিকোণী (Set Square)

(5) কোণচক্র বা চাঁদা (Protractor)

স্বীকার্য ঃ জ্যামিতিক তত্ত্ববিচারের জন্য যন্ত্রের সাহায্যে কতকগুলি সহজ প্রক্রিয়াকে সম্পন্ন করা সম্ভব বলিয়া স্বীকার করিয়া লওয়া হয়। এতদ্ব্যতীত কতকগুলি সহজ অঙ্কনের পদ্ধতিও বিনাপ্রমাণে গৃহীত হইবে বলিয়া মানিয়া লওয়া হয়, ঐগুলিকে **কাল্পনিক অঙ্কন** বলে। নিম্নে ইহাদের কতকগুলির উল্লেখ করা হইল।

(1) যে-কোন দুই বিন্দুকে সরলরেখা দ্বারা সংযোগ করা যাইতে পারে।

(2) একটি সসীম সরলরেখাকে ইচ্ছামত বাড়ানো যাইতে পারে।

(3) যে-কোন বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া ইচ্ছামত ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কন করা যাইতে পারে।

নিম্নরূপ অঙ্কনগুলিও সম্ভব বলিয়া স্বীকার করিয়া লওয়া হয়।

(1) একটি সরলরেখার উপর যে-কোন বিন্দুতে একটি লম্ব টানা যাইতে পারে।

(2) কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার মধ্যবিন্দু মাপিয়া বাহির করা সম্ভব।

(3) কোন কোণকে দ্বিখণ্ডিত করিয়া সরলরেখা টানা যায়।

যন্ত্রের ব্যবহার ঃ এতদ্ব্যতীত নিম্নোক্ত প্রক্রিয়াগুলি যন্ত্রের সাহায্যে সম্পন্ন করা যায়।

(ক) **মাপনীর সাহায্যে** যে-কোন সরলরেখার দৈর্ঘ্য মাপা যায় এবং যে-কোন দৈর্ঘ্যের সরলরেখা অঙ্কন করাও সম্ভব।

(খ) **কোণচক্রের সাহায্যে** যে-কোন মাপের কোণ অঙ্কন করা যায় কিংবা কোন কোণের মান নির্ণয় করা যায়।

(গ) **ত্রিকোণীর সাহায্যে** কোন সরলরেখার যে-কোন বিন্দুতে লম্ব আঁকা সম্ভব। ত্রিকোণীযুগলের সাহায্যে যে-কোন সরলরেখার সমান্তরাল করিয়া কোন বিন্দু দিয়া সরলরেখা টানা যায়।

(ঘ) **পেন্সিল-কম্পাসের** সাহায্যে (i) যে-কোন বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া যে-কোন ব্যাসার্ধের বৃত্ত বা চাপ অঙ্কন করা যায় ; (ii) যে-কোন অনির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের সরলরেখা হইতে নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য কাটিয়া লওয়া যায়।

সাংকেতিক চিহ্ন

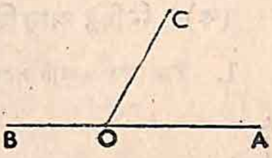
লেখার কাজ সংক্ষেপ করিবার জন্য জ্যামিতিতে নিম্নলিখিত সাংকেতিক চিহ্নগুলি ব্যবহৃত হইয়া থাকে—

অতএব	$\therefore$	কোণ	$\angle$
যেহেতু	$\because$	ত্রিভুজ	$\triangle$
সমান	$=$	বৃত্ত	$\odot$
সমান্তরাল	$\parallel$	লম্ব	$\perp$
বৃহত্তর	$>$	ইঞ্চি ইঃ (″)	
ক্ষুদ্রতর	$<$	ফুট ফুঃ (′)	
অন্তর	$\sim$	সেন্টিমিটার সেঃ মিঃ	
সর্বসম	$\equiv$	মিলিমিটার মিঃ মিঃ	

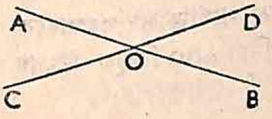
বিশেষ স্বীকার্য

এই পুস্তকের প্রথমাংশে পরীক্ষা ও পরিমাপ দ্বারা কতকগুলি সত্যের প্রতিষ্ঠা করিবার জন্য নিম্নোক্ত পরীক্ষালব্ধ তথ্যগুলি সত্য বলিয়া স্বীকার করিয়া লওয়া হইবে।*

(1) একটি সরলরেখার উপরে অন্য কোন সরলরেখা দণ্ডায়মান হইলে যে দুইটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন হয় উহারা একত্রযোগে দুই সমকোণের সমান। পার্শ্ববর্তী চিত্রে প্রদর্শিত ∠AOC + ∠COB = দুই সমকোণ।



(2) দুই সরলরেখা পরস্পরকে ছেদ করিলে বিপ্রতীপ কোণগুলি পরস্পর সমান। পার্শ্বস্থ চিত্রে প্রদর্শিত ∠AOC = ∠DOB ; আবার ∠AOD = ∠COB.

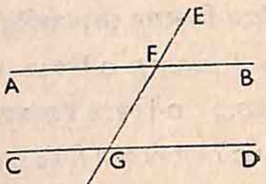


(3) দুই সমান্তরাল রেখাকে তৃতীয় কোন সরলরেখা ছেদ করিলে

(ক) অনুরূপ কোণগুলি পরস্পর সমান,

(খ) একান্তর কোণগুলি পরস্পর সমান,

(গ) ভেদক সরলরেখার একই পার্শ্বস্থ অন্তঃকোণদ্বয় একত্রযোগে দুই সমকোণের সমান।



পার্শ্বের চিত্রে প্রদর্শিত ∠EFB = অনুরূপ ∠FGD

∠AFG = একান্তর ∠FGD

∠BFG + ∠FGD = 180°

* এই স্বীকার্যগুলির সত্যতা কি করিয়া পরীক্ষাদ্বারা প্রতিষ্ঠিত করা যায় তাহা ষষ্ঠ শ্রেণীর পাঠ্যসূচীর অন্তর্ভুক্ত। এই পুস্তকের দ্বিতীয় খণ্ডে ইহাদের কতকগুলি যুক্তিদ্বারা প্রমাণ করা হইয়াছে।

প্রথম অধ্যায়

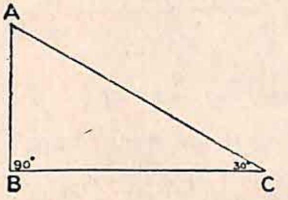
বিবিধ তত্ত্ব ও জ্ঞাতব্যের পরীক্ষামূলক বিচার

ত্রিভুজের কোণসমষ্টি

যে-কোন ত্রিভুজের কোণসমষ্টি দুই সমকোণ হইবে।

(ক) নির্দিষ্ট আকৃতির ত্রিভুজের কোণসমষ্টি নির্ণয়

1. ইচ্ছামত একটি সরলরেখা আঁকিয়া ইহার উপর দুইটি বিন্দু B, C লও।

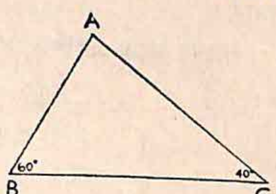


ত্রিকোণীর সাহায্যে BC সরলরেখার B বিন্দুতে একটি লম্ব টান। কোণচক্রের সাহায্যে C বিন্দুতে একটি একটি 30° কোণ আঁক। এই কোণের বাহু CA এবং পূর্বোক্ত লম্ব পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করিয়া ABC ত্রিভুজ উৎপন্ন করিবে।

এক্ষণে কোণচক্র দিয়া মাপিয়া দেখ যে BAC কোণ 60° হইবে। তাহা হইলে ত্রিভুজের কোণসমষ্টি $(90^\circ+30^\circ+60^\circ)=180^\circ=$দুই সমকোণ হইবে।

[এইভাবে C-বিন্দুতে 60° কোণ করিয়া রেখা টানিলে BAC কোণ 30° হইবে। C-বিন্দুতে ইচ্ছামত 45°, 50°, 35° বা অন্য যে-কোন কোণ আঁকিয়া BAC কোণের মান নির্ণয় কর এবং ত্রিভুজের কোণসমষ্টি কত হয় দেখ।]

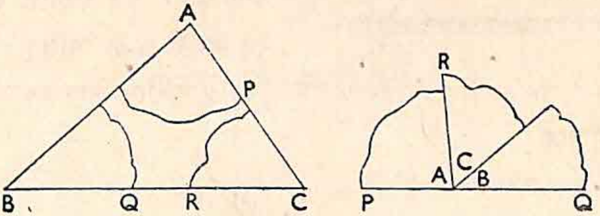
2. ইচ্ছামত একটি সরলরেখা BC আঁকিয়া ইহার উপর দুইটি বিন্দু, B, C লও। BC সরলরেখার B ও C বিন্দুতে যথাক্রমে 60° ও 40° কোণ করিয়া দুইটি সরলরেখা আঁক। উহারা A বিন্দুতে মিলিত হইলে ABC ত্রিভুজ উৎপন্ন হইবে। BAC কোণের মান কোণচক্রদ্বারা মাপিয়া নির্ণয় করিলে উহা 80° হইবে দেখিতে পাইবে। তাহা হইলে ত্রিভুজের কোণসমষ্টি $60^\circ+40^\circ+80^\circ=180^\circ$ হইবে।



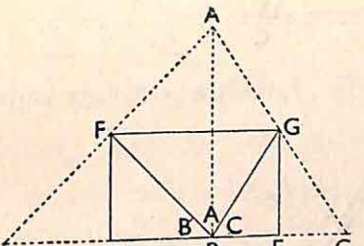
[B ও C বিন্দুতে যে-কোন মাপের কোণ লইয়া ত্রিভুজ অঙ্কন করিয়া অনুরূপ পদ্ধতিতে ত্রিভুজের কোণসমষ্টি কত হয় দেখ।]

(খ) যে-কোন আকৃতির ত্রিভুজের কোণসমষ্টি নির্ণয়

কাগজের একটি ত্রিভুজ কাট। তারপর ত্রিভুজের কোণ তিনটি বিচ্ছিন্ন কর। ধর ABC সেই ত্রিভুজ; বিচ্ছিন্ন অংশগুলি P, Q, R-দ্বারা চিহ্নিত হইয়াছে।



এক্ষণে দক্ষিণপার্শ্বস্থ চিত্রে প্রদর্শিত পদ্ধতিতে ছিন্ন অংশগুলি পর পর বসাইয়া দাও। দেখিতে পাইবে যে সবগুলি কোণ একত্রযোগে সরলকোণ উৎপন্ন করিবে, অর্থাৎ চিত্রের PQ রেখা একটি সরলরেখা হইবে।

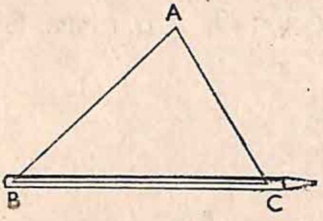


এই পরীক্ষাটি আরও একটি উপায়ে করিতে পার। কাগজের উপর মাপনীর সাহায্যে একটি ত্রিভুজ (ABC) আঁক। মাপিয়া দেখ কোন্ বাহুটি বৃহত্তম। মনে কর BC বাহু বৃহত্তম। এই বাহুর বিপরীত কৌণিক বিন্দু A হইতে BC-এর উপর AP লম্ব টান।

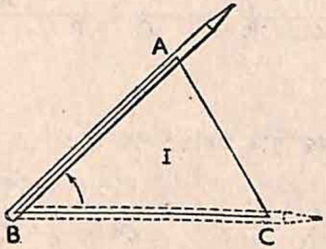
এখন ত্রিভুজটি কাটিয়া লইয়া কাগজটি ভাঁজ কর যাহাতে A, B, C বিন্দুগুলি নূতন অবস্থানে P বিন্দুতে সমাপতিত হয়। লক্ষ্য কর এই অবস্থায় মূল ত্রিভুজের ∠ABC, ∠BAC, ∠ACB কোণ তিনটি পাশাপাশি আসিয়া একত্রে একটি সরলকোণ উৎপন্ন করিবে।

(গ) বাহুর ঘূর্ণনের সাহায্যে কোণসমষ্টি বিচার

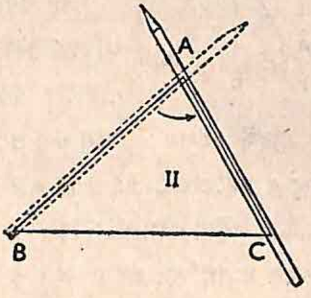
সরলকোণের মূল সংজ্ঞা (=দুই সমকোণ) হইতে ত্রিভুজের কোণসমষ্টি নির্ণয় করা যায়। কাগজের উপরে বড় করিয়া একটি ত্রিভুজ (ABC) আঁক। একটি পেনসিল লইয়া উহাকে BC বাহুর উপর স্থাপন কর যাহাতে পেনসিলের সরু দিকটা C-এর অভিমুখে থাকে।



(I) পেনসিলটিকে B বিন্দুতে ধরিয়া ঘুরাও যাহাতে উহা BA বাহুর উপরে আসিয়া পড়ে।

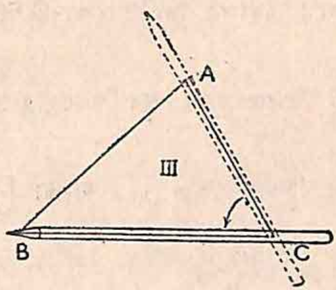


(II) এখন আবার A বিন্দুতে ধরিয়া পেনসিলটিকে একই দিকে ঘুরাইয়া উহাকে AC বাহুর উপর আন।



(III) তারপর ঐ ভাবে C বিন্দুতে ধরিয়া পেনসিলটিকে পুনরায় একই দিকে ঘুরাইয়া উহাকে CB-এর উপরে ফিরাইয়া আন

এক্ষণে দেখিতে পাইবে যে তিনবার একই দিকে ঘুরাইবার ফলে পেনসিলটি বিপরীতমুখী হইয়া গিয়াছে। কোনও সরলরেখাকে এইরূপ ঘুরাইয়া আনিলে



সরলকোণ বা দুই সমকোণ উৎপন্ন হয়। প্রথমবারে পেনসিলটিকে CBA কোণ, দ্বিতীয়বারে BAC কোণ এবং তৃতীয়বারে ACB কোণ ঘুরানো হইয়াছে। অতএব এই তিন কোণের সমষ্টি দ্বারাই দুই সমকোণ উৎপন্ন হইয়াছে। সুতরাং একথা বলা যাইতে পারে যে ত্রিভুজের কোণগুলি একত্রযোগে দুই সমকোণের সমান।

অনুশীলনী

1. একটি সরলরেখার দুই প্রান্তে কোণচক্রের সাহায্যে নিম্নোক্ত মাপের দুইটি কোণ আঁকিয়া ত্রিভুজ উৎপন্ন কর এবং ত্রিভুজের তৃতীয় কোণটির মান মাপিয়া বাহির কর—(ক) $65^\circ, 45^\circ$; (খ) $70^\circ, 50^\circ$; (গ) $80^\circ, 40^\circ$। প্রত্যেক ক্ষেত্রে তিন কোণের সমষ্টি কত হয় দেখ।

2. যদি কোন ত্রিভুজের কোণগুলি পরস্পরের সমান হয় তবে উহাদের প্রত্যেকের মান কত?

3. ABC ত্রিভুজে

(ক) $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 40^\circ$ হইলে, $\angle C$ কত?

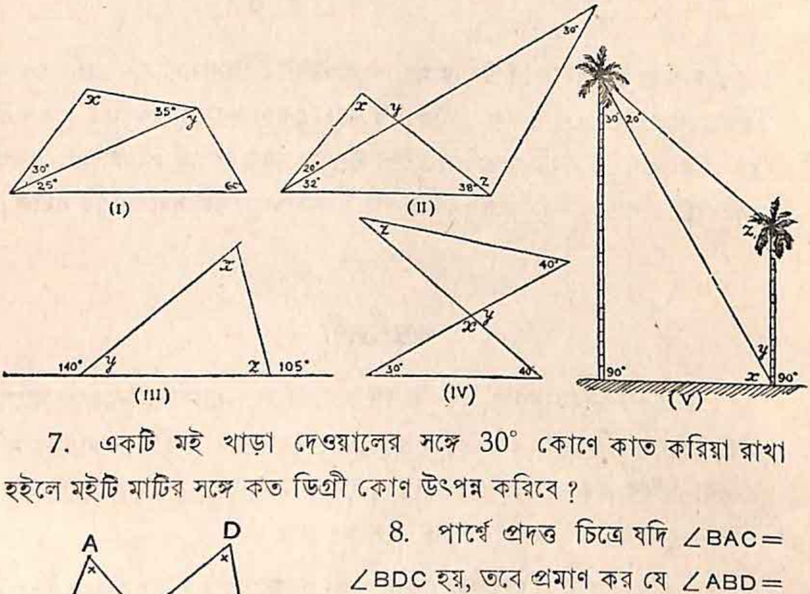
(খ) $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 2\angle A$ হইলে, $\angle C$ কত?

(গ) যদি $\angle A = 6\angle B = 3\angle C$ হয়, তাহা হইলে A, B, C, প্রত্যেক কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর।

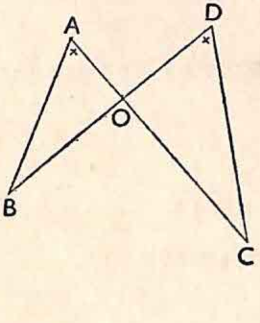
4. একটি সমকোণী ত্রিভুজের দ্বিতীয় কোণটি 50° হইলে, অপর কোণটি কত হইবে ?

5. এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব কি যাহার কোণগুলি যথাক্রমে 45°, 60°, 80° ?

6. নিম্নে অঙ্কিত চিত্রগুলিতে x, y, z বলিয়া নির্দিষ্ট কোণগুলির মান নির্ণয় কর।



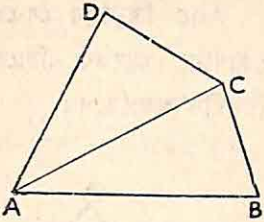
7. একটি মই খাড়া দেওয়ালের সঙ্গে 30° কোণে কাত করিয়া রাখা হইলে মইটি মাটির সঙ্গে কত ডিগ্রী কোণ উৎপন্ন করিবে ?



8. পার্শ্বে প্রদত্ত চিত্রে যদি $\angle BAC = \angle BDC$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $\angle ABD = \angle ACD$.

9. কোন ত্রিভুজের একটি কোণ অপর দুই কোণের সমষ্টির দ্বিগুণ হইলে উহার মান কত ?

চতুর্ভুজের কোণসমষ্টি

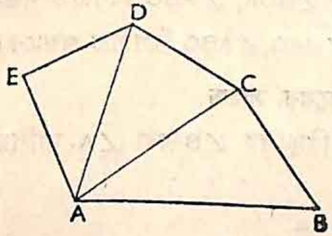


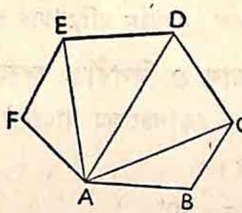
ABCD চতুর্ভুজ। A, C বিন্দুদ্বয় যুক্ত করিলে চতুর্ভুজটি দুইটি ত্রিভুজে (ABC, ADC) বিভক্ত হইবে।

ABC ও ADC ত্রিভুজদ্বয়ের প্রত্যেকের কোণসমষ্টি দুই সমকোণ। অতএব **চতুর্ভুজের কোণগুলির সমষ্টি চার সমকোণ।**

বহুভুজের কোণসমষ্টি

ABCDE পঞ্চভুজ। যে-কোন কৌণিক বিন্দুর সহিত উহার সম্মুখীন



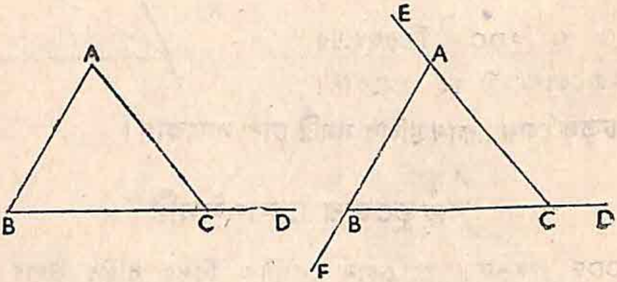


কৌণিক বিন্দুগুলি যোগ করিলে পাওয়া যাইবে তিনটি ত্রিভুজ, উহাদের কোণসমষ্টি হইবে $3 \times 2 = 6$ সমকোণ। এইরূপে ষড়্ভুজের কৌণিক বিন্দুগুলি যোগ করিলে পাওয়া যাইবে চারিটি ত্রিভুজ, উহাদের কোণসমষ্টি হইবে $4 \times 2 = 8$ সমকোণ।

সাধারণভাবে বহুভুজের কোণসমষ্টি এই নিয়মে নির্ণয় করিতে পার। কোন বহুভুজের মোট বাহুর সংখ্যা হইতে দুই বিয়োগ করিলে যে-সংখ্যাটি পাওয়া যাইবে, তাহাকে দুই দিয়া গুণ কর। বহুভুজের কোণসমষ্টি হইবে এই গুণফলের সমানসংখ্যক সমকোণ। ধর যেমন, পঞ্চভুজের কোণসমষ্টি $(5-2) \times 2 =$ ছয় সমকোণ।

ত্রিভুজের বহিঃকোণ

ABC ত্রিভুজের যে-কোন বাহু BC-কে D পর্যন্ত বর্ধিত করা হইলে ACD কোণকে ত্রিভুজের বহিঃকোণ বলা হইবে, ABC এবং BAC কোণদ্বয় উহার বিপরীত অন্তঃকোণ।



তেমনি ∠BAE বহিঃকোণ বলিলে ∠BCA, ∠ABC বিপরীত অন্তঃকোণ হইবে এবং ∠CBF বহিঃকোণ হইলে ∠BAC, ∠ABC বিপরীত অন্তঃকোণ।

বহিঃকোণ ও বিপরীত অন্তঃকোণদ্বয়ের সম্বন্ধ

(1) কোণচক্রের সাহায্যে ABC ত্রিভুজের ∠B এবং ∠A মাপিয়া কত হয় দেখ।

$\angle B = 60^\circ$

$\angle A = 70^\circ$ হইল

এখন ACD কোণ মাপ।

$\angle ACD = 130^\circ$

দেখ $\angle B + \angle A = \angle ACD$ হইয়াছে।

ত্রিভুজের বাহু তিনটির প্রত্যেকটি বাড়াইয়া দিয়া এইরূপ সমতা পরীক্ষা কর।

(2) যুক্তিদ্বারাও এই সত্য পাইতে পার। তোমরা জান ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB =$ দুই সমকোণ।

আবার সন্নিহিত কোণদ্বয় $\angle ACD + \angle ACB = \angle BCD$ সরলকোণ = দুই সমকোণ।

সুতরাং $\angle ABC + \angle BAC = \angle ACD$

অতএব জানা যাইতেছে যে **ত্রিভুজের বহিঃকোণ উহার বিপরীত অন্তঃকোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।**

অনুশীলনী

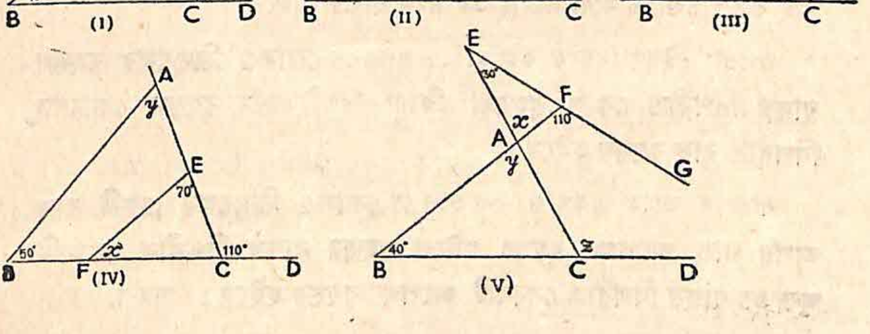
1. একটি ষড়্ভুজের কোণগুলি পরস্পর সমান। উহাদের প্রত্যেকের মান নির্ণয় কর।

2. দ্বাদশ, পঞ্চদশ ও অষ্টাদশ ভুজবিশিষ্ট ক্ষেত্রের কোণের সমষ্টি ডিগ্রীতে প্রকাশ কর।

3. দেখাও যে অষ্টভুজের কোণসমষ্টি পঞ্চভুজের কোণসমষ্টির দ্বিগুণ।

4. কোন বহুভুজের কোণসমষ্টি 900° হইলে, উহার বাহুর সংখ্যা কত ?

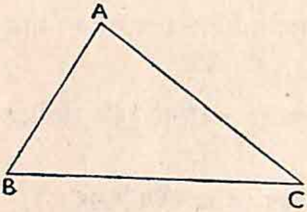
5. নিম্নে অঙ্কিত ত্রিভুজগুলিতে x, y, z দ্বারা চিহ্নিত কোণগুলির পরিমাণ নির্ণয় কর।



ত্রিভুজের বাহু ও কোণের সম্বন্ধ

বিষমবাহু ত্রিভুজ

যে-কোন একটি ত্রিভুজ ABC আঁক। ত্রিভুজটির বাহুগুলি যেন অসমান হয়।



এক্ষণে কোণচক্রের সাহায্যে কোণগুলির মান মাপিয়া বাহির কর।

$\angle BAC = 85^\circ$

$\angle ABC = 60^\circ$

$\angle ACB = 35^\circ$

এবারে মাপনীর সাহায্যে বাহুগুলির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে মাপিয়া লও।

বাহু BC = 3·8 সেন্টিমিটার

বাহু CA = 3·3 সেঃ মিঃ

বাহু AB = 2·3 সেঃ মিঃ

এক্ষণে লক্ষ্য করিয়া দেখ ত্রিভুজের কোণগুলির মধ্যে $\angle BAC$ সর্বাপেক্ষা বড় এবং উহার বিপরীত BC বাহুর দৈর্ঘ্য সবচেয়ে বেশী হইয়াছে।

আবার $\angle ACB$ সর্বাপেক্ষা ছোট কোণ এবং উহার বিপরীত AB বাহুও দৈর্ঘ্যে ক্ষুদ্রতম।

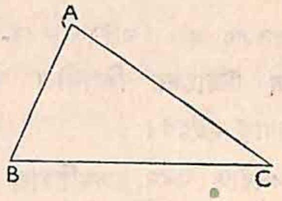
যে-কোন আকারের ত্রিভুজ আঁকিয়া মাপিয়া দেখিতে পার যে উহাদের বাহু ও কোণগুলির মধ্যে সর্বদাই এই সম্বন্ধ পাওয়া যাইবে।

সুতরাং এইরূপ সিদ্ধান্ত করা যাইতে পারে যে **কোনও ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহুর বিপরীত কোণ বৃহত্তম,** কিংবা বিপরীতক্রমে **বৃহত্তম কোণের বিপরীত বাহু বৃহত্তম হইবে।**

সাধারণ ভাবে একথাও বলা চলে যে **কোনও ত্রিভুজের একটি বাহু অপর বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে বৃহত্তর বাহুর বিপরীত কোণটি ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণটি অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।** অথবা,

কোনও ত্রিভুজের একটি কোণ অপর একটি কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে, বৃহত্তর কোণের বিপরীত বাহু ক্ষুদ্রতর কোণের বিপরীত বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

উদাহরণ-স্বরূপ মনে কর ABC ত্রিভুজের সম্বন্ধে জানা আছে যে উহার AC>AB ; তাহা হইলে সিদ্ধান্ত করা যাইবে যে ∠ABC > ∠ACB।



আবার যদি জানা থাকে ∠ABC > ∠ACB, তাহা হইলে সিদ্ধান্ত হইবে যে AC > AB।

ত্রিভুজের এই ধর্ম হইতে আরও একটা সিদ্ধান্ত করা চলে।

একথা জানা আছে যে AC > AB হইলে ∠ABC > ∠ACB,

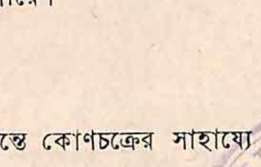
আবার AC < AB হইলে ∠ABC < ∠ACB।

কিন্তু যদি AC ও AB সমান হয় তাহা হইলে উহাদের বিপরীত কোণদ্বয়ের মধ্যে সম্বন্ধ কিরূপ হইবে ? নিশ্চয়ই এরূপ ক্ষেত্রে ABC, ACB কোণদ্বয়ের কোন একটি অপরটি হইতে ছোট বা বড় হইতে পারে না, সুতরাং ঐ কোণদ্বয় পরস্পরের সমান হইবে।

ত্রিভুজ আঁকিয়া ইহা প্রমাণ করা যাইতে পারে।

সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ

যে-কোন সরলরেখার (BC) দুই প্রান্তে কোণচক্রের সাহায্যে দুইটি সমান কোণ (ধর 50°) অঙ্কন কর। এই কোণদ্বয়ের বাহু দুইটি A বিন্দুতে মিলিত হইয়া ABC ত্রিভুজ উৎপন্ন করিবে।

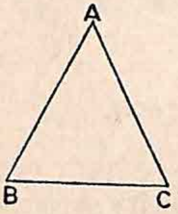


এই ত্রিভুজের AB ও AC বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য মাপনীর দ্বারা মাপিয়া বাহির কর। দেখা যাইবে উহাদের দৈর্ঘ্য সমান।

[যে ত্রিভুজের দুই বাহু সমান উহাকে **সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ** বলা হয়।]

অতএব জানা যাইতেছে যে **কোনও ত্রিভুজের দুইটি কোণ সমান হইলে উহাদের বিপরীত বাহুদ্বয়ও সমান হইবে** অর্থাৎ **ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে।**

বিপরীত ক্রমে, **সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়ের বিপরীত কোণদ্বয় সমান হইবে।**



যে-কোন একটি সরলরেখা AB লও এবং উহার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। BA-এর সঙ্গে যে-কোন কোণ করিয়া A বিন্দু দিয়া আরও একটি সরলরেখা AC টান এবং উহার দৈর্ঘ্য AB-এর সমান কর।

এখন BC যুক্ত কর। ABC ত্রিভুজের B ও C বিন্দুস্থ কোণদ্বয় মাপিয়া দেখ উহারা সমান হইবে।

অনুশীলনী

1. BC একটি সরলরেখা ; উহার B, C বিন্দুতে যথাক্রমে 50° ও 60° কোণ অঙ্কনদ্বারা ABC ত্রিভুজ উৎপন্ন হইলে এই ত্রিভুজের কোন্ বাহু বৃহত্তর হইবে তাহা মাপিয়া নির্ণয় কর ; ইহার যুক্তি কি ?

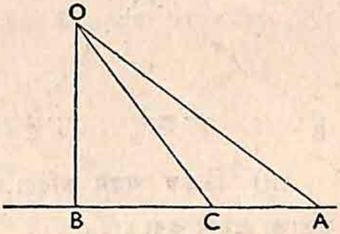
2. ABC একটি ত্রিভুজ, উহার A বিন্দুস্থ কোণ 70° এবং B বিন্দুস্থ কোণ 55° হইলে দেখাও যে AB, AC বাহুদ্বয় পরস্পর সমান।

লম্ব ও তির্যক সরলরেখা

যে-কোন বহিঃস্থ বিন্দু হইতে কোনও সরলরেখার উপর যতগুলি সরলরেখা টানা যাইবে, তাহাদের মধ্যে লম্ব হইবে ক্ষুদ্রতম।

অঙ্কন দ্বারা এই উক্তির সত্যতা পরীক্ষা করিয়া দেখিতে পার।

AB একটি সরলরেখা লও, O উহার বাহিরে যে-কোন বিন্দু। ত্রিকোণীর সাহায্যে O বিন্দু হইতে AB-এর উপর OB লম্ব টান। আবার O বিন্দু হইতে AB-এর উপর যে-কোন দিকে তির্যক-ভাবে OA, OC সরলরেখা টান। এক্ষণে মাপিয়া OB, OC, OA সরলরেখা তিনটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।



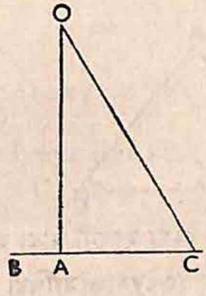
OA = 1·5 ইঞ্চি

OC = 1·15 ইঞ্চি

OB = 0·9 ইঞ্চি

দেখ OB ইহাদের মধ্যে ক্ষুদ্রতম।

আবার ধর, BC একটি সরলরেখা এবং O একটি বহিঃস্থ বিন্দু। O বিন্দু হইতে BC সরলরেখার উপরে দুইটি সরলরেখা OA, OC টানা হইয়াছে। উহাদের মধ্যে OA লম্ব, OC তির্যক।

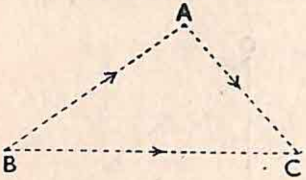


স্পষ্টতঃই OAC একটি ত্রিভুজ হইবে। ইহার ∠OAC সমকোণ। অপর কোণদ্বয়ের সমষ্টি হইবে এক সমকোণ। সুতরাং ∠OCA এক সমকোণ অপেক্ষা ছোট। অথবা ∠OAC > ∠OCA; অতএব OAC কোণের বিপরীত বাহু OC, OCA কোণের বিপরীত বাহু OA অপেক্ষা বৃহত্তর। সুতরাং যুক্তিদ্বারাও পাওয়া যাইতেছে যে লম্বের দৈর্ঘ্য অন্য তির্যক সরলরেখার চেয়ে কম।

ত্রিভুজের বাহুগুলির সম্বন্ধ

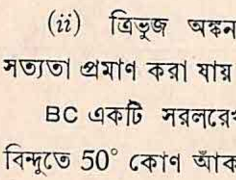
ত্রিভুজের যে-কোন দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে। (Any two sides of a triangle are together greater than the third side.)

(*i*) A, B, C তিনটি বিন্দু। মনে কর তোমাকে B হইতে C বিন্দুতে যাইতে হইবে। তুমি সোজা BC সরলরেখায় না যাইয়া যদি প্রথমে B হইতে A এবং সেখান হইতে C-তে যাও তাহা হইলে স্পষ্টতঃই পথ দীর্ঘতর হইবে। এই প্রকার পথরেখা অঙ্কন করিলেই জানা যায় যে ত্রিভুজের দুই বাহু একত্র-যোগে তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।



(*ii*) ত্রিভুজ অঙ্কন করিয়া মাপনী দ্বারা বাহুগুলির দৈর্ঘ্য মাপিয়াও ইহার সত্যতা প্রমাণ করা যায়।

BC একটি সরলরেখা টান। কোণচক্রের সাহায্যে B বিন্দুতে 60° ও C বিন্দুতে 50° কোণ আঁক। ইহাতে একটি ত্রিভুজ (ABC) উৎপন্ন হইবে। BAC কোণের মান সহজেই জানা যাইবে।



$\angle BAC = 180^\circ - (60^\circ + 50^\circ)$

$= 70^\circ$।

সুতরাং ∠BAC বৃহত্তম কোণ এবং সেজন্য BC বৃহত্তম বাহু। এক্ষণে ত্রিভুজের AB ও AC বাহুর দৈর্ঘ্য মাপনী দ্বারা মাপ ও উহাদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

BC বাহুর দৈর্ঘ্যও মাপিয়া বাহির কর। দেখিবে,

AB = 2·2 সেঃ মিঃ

AC = 2·5 সেঃ মিঃ

AB + AC = 4·7 সেঃ মিঃ

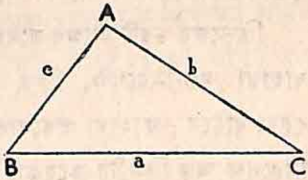
BC = 2·7 সেঃ মিঃ

দেখ AB+AC>BC হইতেছে।

যে-কোন আকৃতির ত্রিভুজ আঁকিয়া বাহুগুলির দৈর্ঘ্য মাপিয়া এই তত্ত্ব পরীক্ষা করিয়া দেখ।

ত্রিভুজের বাহু ও কোণের নামকরণ

ABC একটি ত্রিভুজ। A, B, C বিন্দুস্থ কোণগুলিকে যথাক্রমে ∠A, ∠B, ∠C বলিয়া নির্দেশ করা হইয়া থাকে। A কোণের বিপরীত বাহু BC-কে a, B কোণের বিপরীত বাহু AC-কে b, এবং C কোণের বিপরীত বাহু AB-কে c-দ্বারা নির্দেশ করা হয়। আবার a, b, c দ্বারা বাহুগুলির দৈর্ঘ্যও বুঝানো যাইতে পারে।



ত্রিভুজের যে-কোন কৌণিক বিন্দুকে তাহার **শীর্ষ (Vertex)** বলে। ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষ থাকে। ত্রিভুজের কোন একটি বাহুকে **ভূমি (Base)** বলিয়া নির্দিষ্ট করিলে তখন ভূমির বিপরীত কৌণিক বিন্দুকেই শীর্ষ বলা হইবে। ABC ত্রিভুজের BC ভূমি হইলে A শীর্ষ।

অনুশীলনী

1. নিম্নে বর্ণিত দৈর্ঘ্যের বাহুসম্বলিত ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব কিনা বল—

(*a*) 5·4, 3·5, 2·8 সেঃ মিঃ

(*b*) 6, 2, 3·8 সেঃ মিঃ

(*c*) 4·5, 3·2, 2·3 সেঃ মিঃ

(*d*) 7, 3·2, 3·6 সেঃ মিঃ

2. AB একটি সরলরেখা এবং P উহার বহিঃস্থ যে-কোন বিন্দু। AB হইতে P-এর ন্যূনতম দূরত্ব বলিলে কি বুঝাইবে? কি ভাবে উহা নিরূপণ করিবে?

দ্বিতীয় অধ্যায়

ত্রিভুজের অঙ্গ

ত্রিভুজের ছয়টি অঙ্গ থাকে—তিন বাহু ও তিন কোণ। ইহারা অংশতঃ পরস্পরের উপর নির্ভরশীল। যেমন, ত্রিভুজের তিন বাহুর মধ্যে এমন সম্বন্ধ থাকা দরকার যাহাতে যে-কোন তুই বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে। আবার তিন কোণের সমষ্টি সকল ক্ষেত্রেই তুই সমকোণের সমান হইবে। তাহা হইলে জানা যাইতেছে যে ত্রিভুজের তুই কোণের মানদ্বারা তৃতীয় কোণের মান নির্দিষ্ট হইবে।

ত্রিভুজের ছয়টি অঙ্গের মধ্যে এমন তিনটি অঙ্গের সমাবেশ করা যাইতে পারে যাহারা অন্য-নিরপেক্ষ, কিন্তু এই তিনটি নির্দিষ্ট হইলেই বাকী তিনটি নির্দিষ্ট হইয়া যাইবে ; তাহারা প্রথমোক্ত তিনটির উপর নির্ভরশীল। নিম্নে এইরূপ অন্য-নিরপেক্ষ অঙ্গ তিনটির কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হইতেছে :

(1) তিন বাহু

(2) তুই বাহু, অন্তর্ভূ‘ত কোণ

(3) তুই কোণ, এক বাহু

(4) তুই বাহু ও উহাদের একটির বিপরীত কোণ (যখন উহা সূক্ষ্মকোণ নহে)।

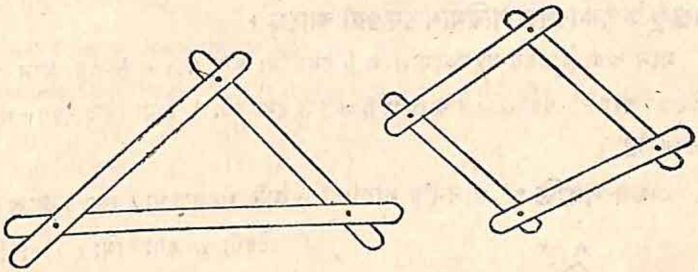
এই তালিকানুযায়ী ত্রিভুজের অঙ্গের মান নির্দিষ্ট করিয়া দিলে ঐ মাপের বা আকৃতির একটি মাত্র ত্রিভুজ অঙ্কন করা যাইবে।

ত্রিভুজের ধর্মের প্রয়োগ

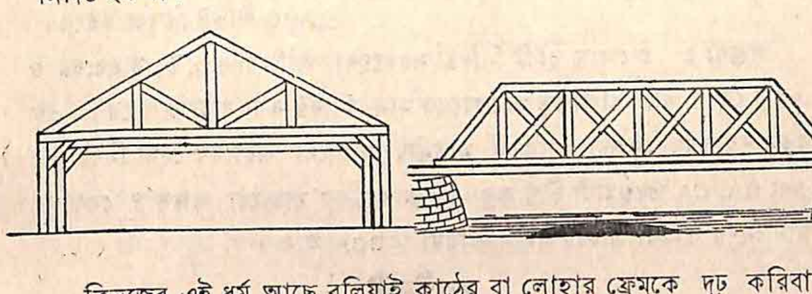
বাহুর দৈর্ঘ্য অপরিবর্তিত রাখিয়া কোন ত্রিভুজের আকৃতি বদলানো যাইবে না, কারণ তিনটি বাহু নির্দিষ্ট হইলেই ত্রিভুজের আকৃতি নির্দিষ্ট হইয়া যায়।

তিন খণ্ড কাঠ চিত্রে প্রদর্শিত ত্রিভুজের ন্যায় আকৃতি করিয়া পেরেক দ্বারা জুড়িয়া দিলে কোনও দিক হইতে চাপ দিয়া উহার আকৃতির পরিবর্তন করা

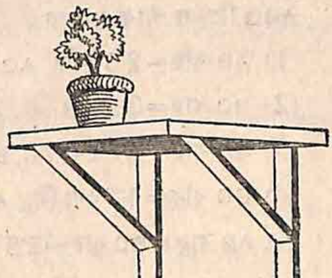
যায় না। কিন্তু ঐ-প্রকারে চারি খণ্ড কাঠ জুড়িয়া চাপ দিলে আকৃতি বদলাইয়া যায়। ত্রিভুজের উল্লিখিত ধর্মের জন্যই উহা সম্ভব হয় না।



ত্রিভুজাকৃতি ফ্রেমের তিন কৌণিক বিন্দুতে পেরেক দিয়া আঁটিয়া দিলে ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য নির্দিষ্ট হইয়া যাইতেছে এবং সেজন্য ত্রিভুজের আকৃতিও নির্দিষ্ট হইবে। কিন্তু চতুর্ভুজের চারি বাহুর দৈর্ঘ্য নির্দিষ্ট হইলেও উহার আকৃতি নির্দিষ্ট হয় না।



ত্রিভুজের এই ধর্ম আছে বলিয়াই কাঠের বা লোহার ফ্রেমকে দৃঢ় করিবার জন্য সেতু, ঘরবাড়ী প্রভৃতি নির্মাণের কাজে ত্রিকোণাকৃতি গঠনের প্রচলন আছে।



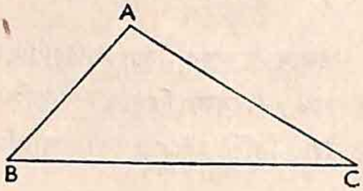
পার্শ্বস্থ চিত্রে দেখ, তাক তৈয়ারী করিতেও এই কারণে ফ্রেমকে ত্রিকোণাকৃতি করা হইয়া থাকে।

ত্রিভুজ অঙ্কন

1. একটি ত্রিভুজ আঁক ; উহার দুই বাহুর দৈর্ঘ্য এবং উহাদের অন্তর্ভুর্ত কোণের পরিমাণ দেওয়া আছে।

মনে কর, বাহুদ্বয় যথাক্রমে a ও b সেঃ মিঃ দীর্ঘ (a ও b-এর মান যথেচ্ছ লইতে পার ; ধর $a=4·4$ এবং $b=3·3$ সেঃ মিঃ) এবং উহাদের অন্তর্ভূর্ত কোণ 32°।

অঙ্কন-পদ্ধতি ঃ মাপনীর সাহায্যে একটি সরলরেখা (BC) আঁক যাহার দৈর্ঘ্য a সেঃ মিঃ। C বিন্দুতে কোণচক্রের সাহায্যে 32° মাপের একটি কোণ (BCA) আঁক। এই কোণের CA বাহুর দৈর্ঘ্য b সেঃ মিঃ লও। AB যুক্ত কর।



△ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে।

মন্তব্য ঃ এ-ক্ষেত্রে দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখা আঁকিয়াও a, b, বাহুদ্বয়ের ও একটি কোণ আঁকিয়া অর্ন্তভূর্ত কোণের মান নির্দিষ্ট করা যাইতে পারে। এই রকম সরলরেখা দেওয়া থাকিলে মাপনীর সাহায্যে উহাদের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর এবং BA, CA তদনুযায়ী দীর্ঘ কর। কোণচক্রের সাহায্যে অন্তর্ভূর্ত কোণের মান নির্ণয় করিয়া তাহার সমান করিয়া ∠BCA আঁক।

অনুশীলনী

ABC ত্রিভূজ আঁক যাহার

(1) AB বাহু=2·3 ইঞ্চি, AC বাহু=3 ইঞ্চি এবং ∠BAC=50°

(2) BC বাহু=3·2 সেঃ মিঃ, AC বাহু=4·5 সেঃ মিঃ এবং ∠BCA=36°

(3) AB বাহু=5·6 সেঃ মিঃ, BC বাহু=3·5 সেঃ মিঃ এবং ∠ABC=40°

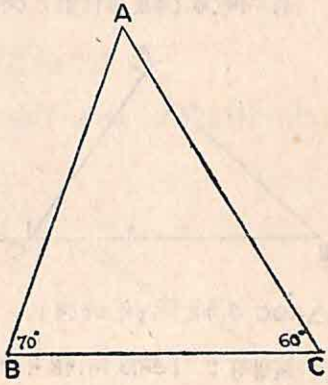
(4) BC বাহু=4·7 সেঃ মিঃ, AB বাহু=5·3 সেঃ মিঃ এবং ∠ABC=90°

(5) AB বাহু=BC বাহু=2·5 ইঞ্চি এবং ∠ABC সমকোণ ; ∠ACB এবং ∠BAC কোণদ্বয়ের মান মাপিয়া বাহির কর। উহাদের কি সম্বন্ধ পাওয়া গেল ?

2. একটি ত্রিভুজ আঁক, উহার একটি বাহুর দৈর্ঘ্য এবং ঐ বাহু সংলগ্ন কোণদ্বয়ের মান দেওয়া আছে।

মনে কর, বাহুর দৈর্ঘ্য a (a-এর যথেচ্ছ মান লও, ধর $a=1{\cdot}6$ ইঞ্চি); সংলগ্ন কোণদ্বয় মনে কর যথাক্রমে 60° এবং 70°।

অঙ্কন-পদ্ধতি : যে-কোন সরলরেখা (BC) a ইঞ্চি দীর্ঘ করিয়া আঁক। উহার B বিন্দুতে 70° এবং C বিন্দুতে 60° কোণদ্বয় কোণচক্রের সাহায্যে অঙ্কন কর। ইহাদের বাহুদ্বয় A বিন্দুতে মিলিত হইল।



△ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে।

মন্তব্য : বাহুর দৈর্ঘ্য কোনও নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান বলিয়া দেওয়া হইলে ঐ সরলরেখার দৈর্ঘ্য মাপিয়া লও এবং BC-এর দৈর্ঘ্য উহার সমান কর। দুইটি কোণ আঁকিয়া কোণদ্বয়ের মান নির্দিষ্ট করিয়া দিলে, উহাদের মান মাপিয়া বাহির কর এবং ঐ সমান করিয়া B, C বিন্দুতে কোণ আঁক।

অনুশীলনী

নিম্নে প্রদত্ত মাপ অনুযায়ী ত্রিভুজ (ABC) আঁক—

(1) BC বাহুর দৈর্ঘ্য=3·2 সেঃ মিঃ এবং B ও C বিন্দুস্থ কোণ যথাক্রমে 40° এবং 55°।

(2) AB বাহুর দৈর্ঘ্য=4·6 সেঃ মিঃ এবং A ও B বিন্দুস্থ কোণদ্বয় যথাক্রমে 50° এবং 70°।

(3) AC বাহুর দৈর্ঘ্য=5·3 সেঃ মিঃ এবং A ও C বিন্দুস্থ কোণদ্বয় যথাক্রমে 45° এবং 55°।

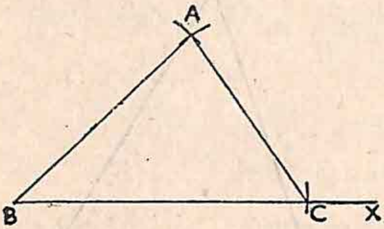
(4) BC বাহুর দৈর্ঘ্য=3·7 সেঃ মিঃ এবং B ও C বিন্দুস্থ কোণদ্বয়ের প্রত্যেকটি 60°। AB, AC বাহুর দৈর্ঘ্য মাপিয়া বাহির কর। বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের সম্বন্ধ কিরূপ হইল ?

3. একটি ত্রিভুজ আঁক, উহার তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে।

মনে কর, বাহুগুলির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b, c সেঃ মিঃ (ধর a, b, c-এর মান যথাক্রমে 3·7, 2·6, 3·1 সেঃ মিঃ)।

অঙ্কন-পদ্ধতি ঃ যে-কোন সরলরেখা (BX) আঁক এবং উহা হইতে a সেঃ মিঃ দীর্ঘ BC অংশ কাটিয়া লও।

B বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া c সেঃ মিঃ ব্যাসার্ধ লইয়া কম্পাসের সাহায্যে একটি চাপ আঁক। পুনরায় C বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া b সেঃ মিঃ ব্যাসার্ধ লইয়া আরও একটি চাপ আঁক। এই চাপ দুইটির ছেদবিন্দু A ; ইহার সহিত যথাক্রমে B ও C যুক্ত করিয়া সরলরেখা টান।



△ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে।

মন্তব্য ঃ তিনটি নির্দিষ্ট সরলরেখা আঁকিয়াও a, b, c-এর দৈর্ঘ্য দেওয়া যাইতে পারে। সেক্ষেত্রে BX সরলরেখা হইতে কম্পাসের সাহায্যে a-এর সমান করিয়া BC কাটিয়া লও। B ও C বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া অঙ্কিত চাপের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে c ও b-এর সমান হইবে।

অনুশীলনী

(1) এমন ত্রিভুজ অঙ্কন কর যাহাদের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য নিম্নে প্রদত্ত মাপ অনুযায়ী হইবে ঃ

(ক) 5·3, 3·6, 2·8 সেঃ মিঃ

(খ) 2·5, 1·8, 1·2 ইঞ্চি

(গ) 4·4, 4·5, 3·1 সেঃ মিঃ

(2) 6·5, 3·2, 2·8 সেঃ মিঃ বাহুবিশিষ্ট কোন ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব কি ? কারণ সহ উত্তর লিখ।

4. একটি সমকোণী ত্রিভুজ আঁক, উহার অতিভুজ এবং অপর একটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে।

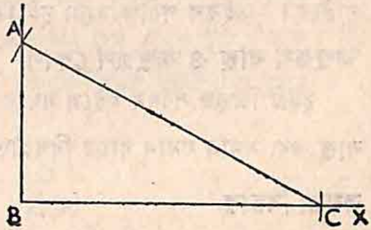
[যে ত্রিভুজের একটি কোণ সমকোণ তাহাকে **সমকোণী** ত্রিভুজ বলে এবং ইহার সমকোণের বিপরীত বাহুকে **অতিভুজ** বলে।]

মনে কর অতিভুজের দৈর্ঘ্য b সেঃ মিঃ

এবং অপর বাহুর দৈর্ঘ্য a সেঃ মিঃ।

[$b=4{\cdot}3$ সেঃ মিঃ এবং $a=3{\cdot}8$ সেঃ মিঃ ধরিতে পার।]

অঙ্কন-পদ্ধতি ঃ যে কোন সরলরেখা BX হইতে a সেঃ মিঃ দীর্ঘ BC অংশ কাটিয়া লও ; BC সরলরেখার B বিন্দুতে ত্রিকোণীর সাহায্যে একটি লম্ব (BA) টান।



C বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া b সেঃ মিঃ (অতিভুজের সমান) ব্যাসার্ধ লইয়া কম্পাসের সাহায্যে একটি চাপ আঁক। উহা BA সরলরেখাকে A বিন্দুতে ছেদ করিবে। AC যুক্ত কর। $\triangle ABC$ উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

মন্তব্য ঃ দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখা আঁকিয়াও a, b-এর মান নির্দিষ্ট করা যাইতে পারে। সেক্ষেত্রে a-এর সমান করিয়া BC কাট, এবং C বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া যে চাপ আঁকা হইবে উহার ব্যাসার্ধ b-এর সমাস লও।

অনুশীলনী

নিম্নে প্রদত্ত মাপ অনুযায়ী সমকোণী ত্রিভুজ আঁক

1. অতিভুজ $=6{\cdot}1$ সেঃ মিঃ, অপর বাহু $=3{\cdot}8$ সেঃ মিঃ
2. অতিভুজ $=5{\cdot}7$ সেঃ মিঃ, অপর বাহু $=4{\cdot}3$ সেঃ মিঃ
3. অতিভুজ $=9$ সেঃ মিঃ, অপর বাহু $=5$ সেঃ মিঃ

সর্বসম ত্রিভুজের কথা

সর্বসম ত্রিভুজ

কোনও ত্রিভুজের ছয়টি অঙ্গ (তিন কোণ ও তিন বাহু) যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের ছয়টি অঙ্গের সমান হইলে ত্রিভুজ দুইটিকে **সর্বতোভাবে সমান** বা **সর্বসম** বলা হয়।

উপরিপাতন দ্বারা সমতা নির্ণয়

এরূপ ক্ষেত্রে একটি ত্রিভুজকে অপরটির উপর এমন ভাবে স্থাপন করা যাইতে পারে যে, প্রথমটির ছয়টি অঙ্গ দ্বিতীয়টির ছয়টি অঙ্গের সহিত একেবারে মিলিয়া যাইবে। এইরূপ পরীক্ষাদ্বারা দুই ত্রিভুজের সমতা নির্ণয় করা যায়।

অনুরূপ বাহু ও অনুরূপ কোণ

দুইটি ত্রিভুজ সর্বসম হইলে সমান সমান কোণের বিপরীত বাহুকে **অনুরূপ বাহু** এবং সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণকে **অনুরূপ কোণ** বলা হয়।

সমতা বিচার

ত্রিভুজের ছয়টি অঙ্গ অংশতঃ পরস্পরের সঙ্গে সম্বন্ধবদ্ধ, অর্থাৎ কয়েকটি বিশেষ অঙ্গ নির্দিষ্ট হইলে অপর অঙ্গগুলি স্বতঃই নির্দিষ্ট হইয়া যায়। ফলে ঐ নির্দিষ্ট কয়টি অঙ্গবিশিষ্ট একাধিক ত্রিভুজ হইতে পারে না। সেজন্য দুইটি ত্রিভুজ যে সর্বসম, তাহা জানিবার জন্য উহাদের ছয়টি অঙ্গ পৃথকভাবে সমান আছে কিনা তাহা পরীক্ষা করিবার প্রয়োজন হয় না। দুইটি ত্রিভুজ সর্বসম কিনা তাহা জানিতে নিম্নে বর্ণিত তিন অঙ্গের সমতা পরীক্ষা করিলেই চলিতে পারে। যথা,

(১) যে-কোন দুই বাহু ও অন্তর্ভূত কোণ ;

(২) তিন বাহু ;

(৩) যে-কোন দুই কোণ ও এক বাহু ;

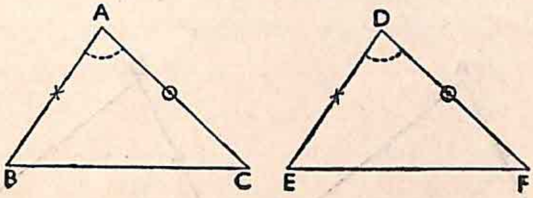
(৪) সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর কোন বাহু।

পরবর্তী পৃষ্ঠায় পরীক্ষা দ্বারা ইহার সত্যতা প্রমাণ করিয়া দেখান হইতেছে।

সর্বসম ত্রিভুজের লক্ষণ

(1) দুইটি ত্রিভুজের মধ্যে একের যে-কোন দুই বাহু ও অন্তর্ভুক্ত কোণটি যথাক্রমে অপর ত্রিভুজের দুই বাহু ও অন্তর্ভুক্ত কোণের সমান হইলে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে।

পরীক্ষা ঃ কাগজের উপর একটি যে-কোন মাপের ত্রিভুজ (ABC) আঁক। এখন ত্রিভুজ অঙ্কন করিবার পদ্ধতি অনুযায়ী আরও একটি ত্রিভুজ (DEF) আঁক যাহার একটি বাহু (DE) AB-এর সমান, অপর বাহু (DF) AC-এর সমান, এবং DE ও DF-এর অন্তর্ভূক্ত (EDF) কোণ BAC কোণের সমান। কাঁচিদ্বারা ত্রিভুজ দুইটি পৃথক করিয়া কাট। এখন BAC ত্রিভুজকে EDF ত্রিভুজের উপর এমন ভাবে রাখ যেন A বিন্দু D বিন্দুর উপর ও AB বাহু DF বাহুর উপরে পড়ে এবং AC বাহু DF-এর দিকে পড়ে। এখন দেখিবে ত্রিভুজ দুইটি একেবারে মিলিয়া যাইবে।



ইহা হইতে জানা যাইতেছে যে ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে

যদি AB বাহু = DE বাহু

AC বাহু = DF বাহু

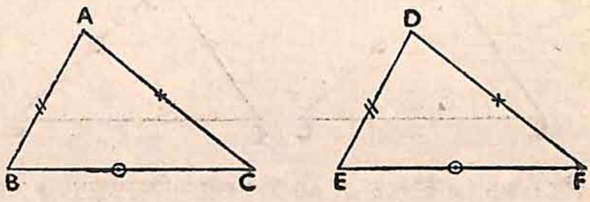
এবং $\angle BAC = \angle EDF$ হয়, তবে

ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হইবে। এক্ষেত্রে লক্ষ্য করিয়া দেখ যে, যে দুই বাহু পরস্পর সমান বলিয়া জানা আছে উহাদের বিপরীত কোণদ্বয়ও পরস্পর সমান হইবে এবং সমান সমান কোণদ্বয়ের বিপরীত বাহুদ্বয় (অনুরূপ বাহু) পরস্পর সমান হইবে। উল্লিখিত ত্রিভুজে $\angle ACB = \angle DFE$, $\angle ABC = \angle DEF$ এবং BC বাহু = EF বাহু।

(2) দুইটি ত্রিভুজের মধ্যে একটির তিন বাহু যথাক্রমে অপরটির তিন বাহুর সঙ্গে সমান হইলে ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হইবে।

পরীক্ষা ঃ কাগজের উপর একটি যে-কোন মাপের ত্রিভুজ (ABC) আঁক। ইহার বাহু তিনটির মান মাপনীদ্বারা মাপিয়া বাহির কর। ধর উহাদের মান যথাক্রমে a, b, c একক। এখন আরও একটি ত্রিভুজ (DEF) আঁক যাহার বাহু তিনটি যথাক্রমে a, b, c-এর সমান।

ত্রিভুজ দুইটি পৃথকভাবে কাঁচি দিয়া কাট। এখন ABC ত্রিভুজকে DEF ত্রিভুজের উপর এরূপভাবে স্থাপন কর যাহাতে BC বাহু EF-এর সহিত মিলিয়া যায় এবং A বিন্দু D বিন্দুর দিকে পড়ে। একটু চেষ্টা করিলে দেখিবে কোন বিশেষ অবস্থানে দুইটি ত্রিভুজ সর্বতোভাবে মিলিয়া যাইবে।



এই পরীক্ষায় জানা যাইতেছে যে ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে

যদি AB বাহু = DE বাহু

AC বাহু = DF বাহু

BC বাহু = EF বাহু হয়, তবে

বলা যাইবে যে ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম, এবং $\angle BAC = \angle EDF$, $\angle ABC = \angle DEF$, $\angle ACB = \angle DFE$।

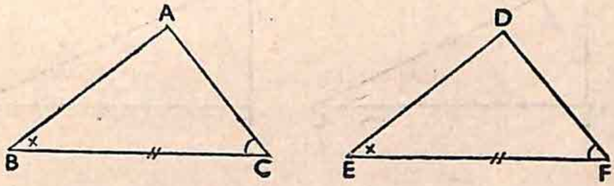
(3) দুইটি ত্রিভুজের মধ্যে একটির যে-কোন দুই কোণ ও একটি বাহু যথাক্রমে অপরটির দুই কোণ ও অনুরূপ বাহুর সঙ্গে সমান হইলে জানা যাইবে যে ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

পরীক্ষা : কাগজের উপর একটি যে-কোন মাপের ত্রিভুজ (ABC) আঁক। ইহার যে-কোন বাহু BC এবং ঐ বাহুসংলগ্ন ABC, ACB কোণদ্বয়ের মান মাপিয়া বাহির কর।

এখন আরও একটি এমন ত্রিভুজ (DEF) আঁক যাহার EF বাহু = BC বাহু এবং $\angle DEF = \angle ABC$ ও $\angle DFE = \angle ACB$।

ত্রিভুজ দুইটি পৃথকভাবে কাঁচি দিয়া কাট।

ত্রিভুজ ABC-কে DEF ত্রিভুজের উপরে এমনভাবে স্থাপন কর যেন BC বাহু EF বাহুর সহিত মিলিয়া যায় এবং A বিন্দু D বিন্দুর দিকে পড়ে। এখন একটু চেষ্টা করিলেই দেখিতে পাইবে যে, ABC ত্রিভুজ DEF ত্রিভুজের সঙ্গে সর্বতোভাবে মিলিয়া যাইবে।



এই পরীক্ষায় জানা যাইতেছে ABC, DEF ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে

যদি BC বাহু = EF বাহু

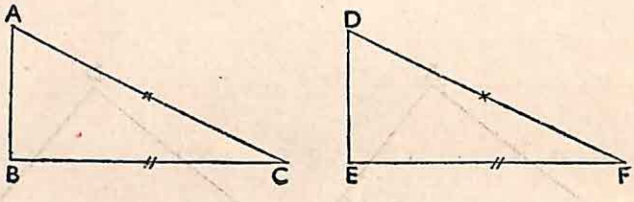
$\angle ABC = \angle DEF$

$\angle ACB = \angle DEF$ হয়, তবে

ABC, DEF ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম, এবং $\angle BAC = \angle EDF$ ও AB বাহু = DE বাহু, AC বাহু = DF বাহু হইবে।

(4) দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যে একটির অতিভুজ এবং অপর কোন বাহু যথাক্রমে অপরটির অতিভুজ এবং অপর এক বাহুর সঙ্গে সমান হইলে ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হইবে।

পরীক্ষা ঃ কাগজের উপর যে-কোন মাপের একটি সমকোণী ত্রিভুজ (ABC) আঁক। ইহার অতিভুজ AC এবং অপর বাহু AB-এর মান মাপনী দিয়া মাপিয়া নির্ণয় কর। ধর ইহাদের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে b ও c একক। অপর একটি সমকোণী ত্রিভুজ (DEF) আঁক যাহার অতিভুজ (DF) b-এর ও DE বাহু c-এর সমান এবং E কোণ সমকোণ। এখন কাঁচি দিয়া ত্রিভুজ দুইটি কাটিয়া লও, এবং ABC ত্রিভুজকে DEF ত্রিভুজের উপর এমনভাবে স্থাপন কর যেন AB, DE-এর সহিত মিলিয়া যায় এবং BC, EF-এর উপর পড়ে। এখন চেষ্টা করিলেই দেখিবে ABC, DEF ত্রিভুজদ্বয় সর্বতোভাবে মিলিয়া যাইবে।



এই পরীক্ষাদ্বারা জানা যাইতেছে যে ABC, DEF সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে

যদি অতিভুজ AC = অতিভুজ DF,

বাহু AB = বাহু DE হয়, তবে

ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম এবং BC বাহু = EF বাহু, ∠ACB = ∠DFE এবং ∠BAC = ∠EDF হইবে।

অনুশীলনী

1. $\triangle ABC, \triangle DEF$ ত্রিভুজদ্বয় নিম্নোক্ত ক্ষেত্রে সর্বসম কিনা বিচার কর :—

(a) $\angle A = \angle D$, $AB = DE$, $AC = DF$

(b) $BC = EF$, $AB = DE$, $\angle BAC = \angle EDF$

(c) $AC = DF$, $\angle A = \angle D$, $\angle C = \angle F$

(d) $AC = DF$, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$

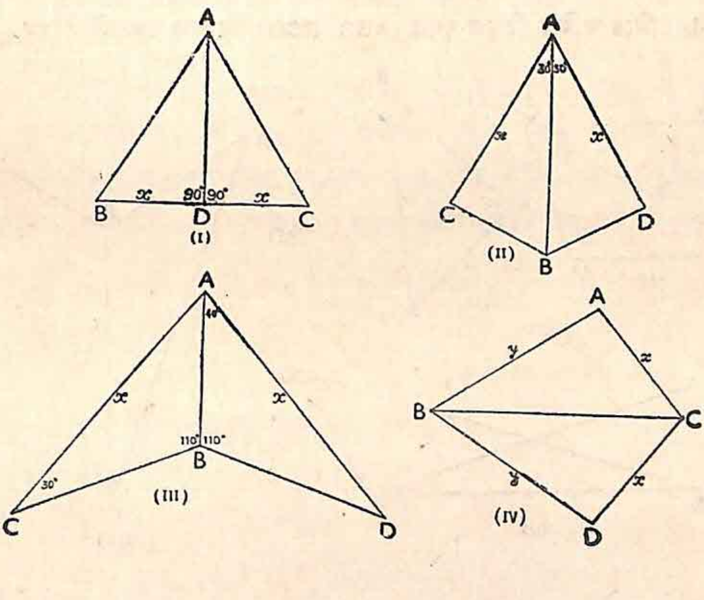
(e) $AB = EF$, $AC = DF$, $\angle C = \angle F$

(f) $\angle A = \angle D = 90^\circ$, $AB = DE$, $\angle B = \angle E$

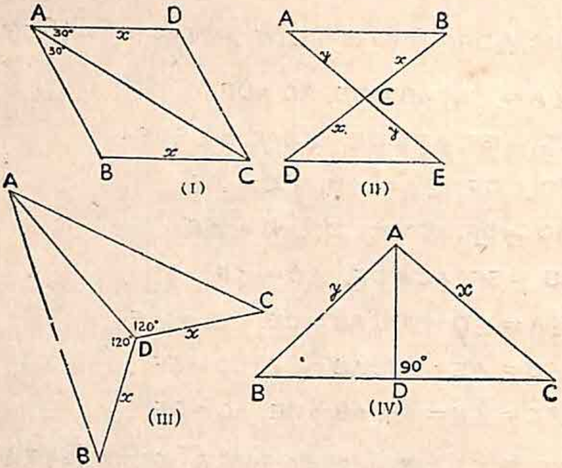
(g) $\angle B = \angle E = 90^\circ$, $AB = DE$, $BC = EF$

(h) $\angle C = \angle F = 90^\circ$, $AB = DE$, $AC = DF$.

2. নিম্নে অঙ্কিত চিত্রগুলির প্রত্যেকটিতে প্রদর্শিত ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম বলিবার যুক্তি প্রদর্শন কর : [x, y, z বাহুগুলির দৈর্ঘ্য নির্দেশ করিতেছে]

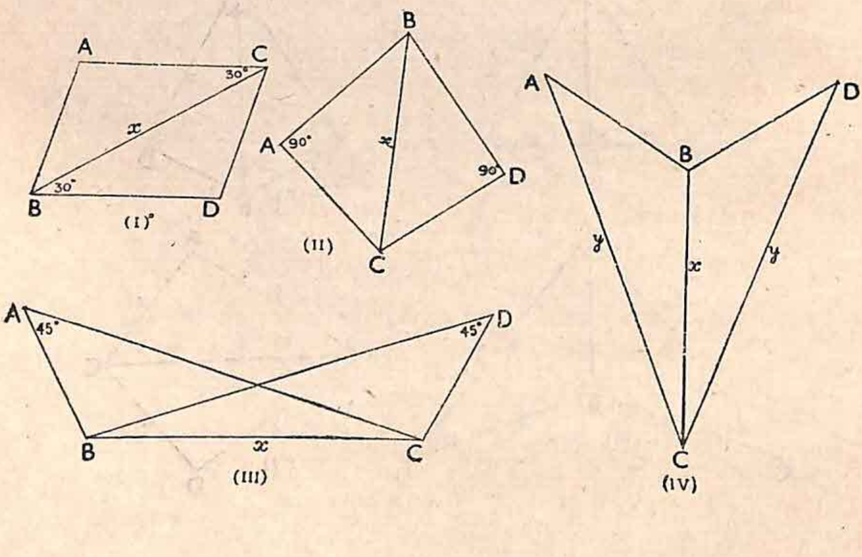


3. নিম্নে অঙ্কিত চিত্রগুলির প্রত্যেকটিতে প্রদর্শিত ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম কিনা



তাহা বিচার করা সম্ভব কি ? সম্ভবপর ক্ষেত্রে ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম কিনা তাহা নির্ণয় কর। [x, y, পার্শ্ববর্তী বাহুর দৈর্ঘ্য নির্দেশ করিতেছে।]

4. নিম্নে অঙ্কিত ত্রিভুজ-যুগল (ABC, BCD) প্রত্যেক ক্ষেত্রেই সর্বসম।



যে-সকল অঙ্গের সমতা দেওয়া আছে তাহা ভিন্ন আর কোন্ অঙ্গের সমতা জানা থাকিলে ত্রিভুজদ্বয়কে সর্বসম বলা যাইবে ?

5. ABC ত্রিভুজের AC বাহুর মধ্যবিন্দু D ; BD যুক্ত করিয়া উহাকে E পর্যন্ত বর্ধিত কর যাহাতে BD=DE হয়। CE যুক্ত করিয়া দেখাও যে △ABD, △CED সর্বসম।

6. ABC ত্রিভুজে AB=AC ; BC বাহুর উপর A বিন্দু হইতে AD লম্ব টানা হইয়াছে। AD রেখা যে △ABC-কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে তাহা কি করিয়া জানা যায় ?

7. ABC ত্রিভুজে ∠B=∠C ; A বিন্দু হইতে BC বাহুর উপর AD লম্ব টানা হইয়াছে। দেখাও যে △ABD, △ACD সর্বসম।

8. ABC ত্রিভুজে ∠BAC-এর দ্বিখণ্ডক AD, BC বাহুর উপর লম্ব হইলে AB=AC হইবে কেন ?

9. ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ। D, E, F যথাক্রমে BC, AC ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু। DE, EF, FD যুক্ত করিলে DEF ত্রিভুজ সমবাহু মনে করিবার যুক্তি কি ?

10. ABC ত্রিভুজে AB=AC ; BC বাহুর মধ্যবিন্দু D ; AD যুক্ত করিলে দেখাও যে ABC ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত হইবে।

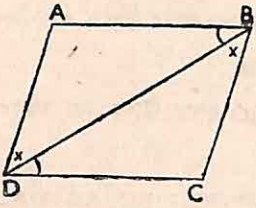
11. এক ব্যক্তির একখণ্ড চতুষ্কোণ জমি আছে, উহার বিপরীত বাহুগুলির দৈর্ঘ্য সমান। কি প্রকারে রেখা টানিলে জমিটি দুইটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত হইবে ?

তৃতীয় অধ্যায়

সামান্তরিকের ধর্ম

সামান্তরিক

যে চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি সমান্তরাল তাহার নাম **সামান্তরিক** (Parallelogram)।



ABCD চতুর্ভুজের AB, DC বাহু সমান্তরাল ; আবার AD, BC বাহুদ্বয়ও সমান্তরাল। সুতরাং ABCD একটি সামান্তরিক।

সামান্তরিকের কর্ণ (Diagonal)

সামান্তরিকের বিপরীত কৌণিক বিন্দুদ্বয় সংযুক্ত করিয়া যে রেখা টানা যায় তাহাকে **কর্ণ** বলে। প্রত্যেক সামান্তরিকের দুইটি কর্ণ থাকিবে।

ABCD সামান্তরিকের একটি কর্ণ BD ; এইরূপ A ও C যুক্ত করিলে আর একটি কর্ণ পাওয়া যাইবে।

(ক) সামান্তরিকের বিপরীত কোণের সম্বন্ধ ঃ

AB, CD সমান্তরাল ও BD উহাদের ভেদক ; সুতরাং $\angle ABD =$ একান্তর $\angle BDC$। অনুরূপ কারণে $\angle CBD =$ একান্তর $\angle ADB$

একত্রযোগে $\angle ABD + \angle DBC = \angle BDC + \angle ADB$

অর্থাৎ $\angle ABC = \angle ADC$

তদ্রূপ $\angle BAD = \angle BCD$.

সামান্তরিকের বিপরীত কোণগুলি সমান।

(খ) সামান্তরিকের একই পার্শ্বস্থ কোণদ্বয়ের সম্বন্ধ ঃ

AB, DC সমান্তরাল ও AD উহাদের ভেদক। সুতরাং ∠BAD + ∠ADC = দুই সমকোণ।

সামান্তরিকের একই পার্শ্বস্থ কোণদ্বয় একত্রযোগে দুই সমকোণ।

(গ) সামান্তরিকের বিপরীত বাহুদ্বয়ের সম্বন্ধ ঃ

BD কর্ণদ্বারা সামান্তরিকটি ABD, CDB ত্রিভুজদ্বয়ে বিভক্ত হইয়াছে। ত্রিভুজ দুইটি কিন্তু সর্বসম। কারণ,

∠ABD = ∠CDB

∠ADB = ∠CBD

BD বাহুটি দুই ত্রিভুজের সাধারণ বাহু

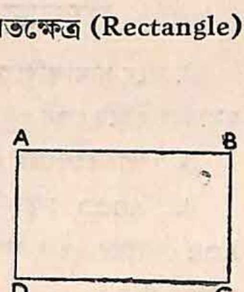
সুতরাং ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম

∴ AB = CD, AD = CB

অর্থাৎ **সামান্তরিকের বিপরীত বাহুগুলি সমান; এবং সামান্তরিকের কর্ণ উহাকে দ্বিখণ্ডিত করে,** অর্থাৎ দুইটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে।

বিশেষ আকৃতির সামান্তরিক

যে-সামান্তরিকের কোণগুলি সমকোণ তাহাকে **আয়তক্ষেত্র (Rectangle)** বলে।



ABCD চতুর্ভুজে

AB ∥ DC

AD ∥ BC

এবং ∠ABC, ∠BCD,

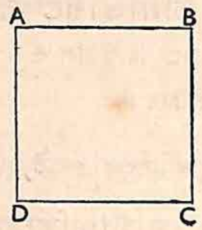
∠CDA, ∠DAB

ইহারা প্রত্যেকে সমকোণ, সুতরাং ABCD একটি আয়তক্ষেত্র।

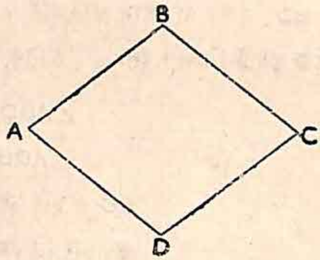
যে-আয়তক্ষেত্রের বাহুগুলি পরস্পর সমান, তাহাকে **বর্গক্ষেত্র (Square)** বলে। ABCD আয়তক্ষেত্রে

$$AB = BC = CD = DA$$

বলিয়া ইহা একটি বর্গক্ষেত্র।

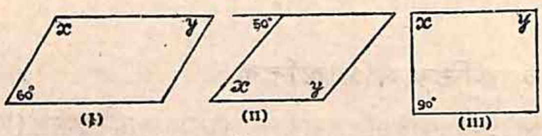


যে-সামান্তরিকের বাহুগুলি পরস্পর সমান কিন্তু কোণগুলি সমান নহে, তাহার নাম **রম্বস (Rhombus)**। ABCD সামান্তরিকের AB, BC, CD, DA বাহুগুলি সমান, কিন্তু ইহার কোণগুলি সমকোণ নহে বলিয়া ইহা বর্গক্ষেত্র নহে, রম্বস।



অনুশীলনী

1. নিম্নে অঙ্কিত সামান্তরিকগুলিতে x, y দ্বারা নির্দিষ্ট কোণগুলির পরিমাণ নির্ণয় কর :—



2. যে-সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ উহার সবগুলি কোণই সমকোণ হইবে কেন ?

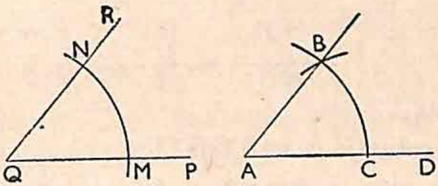
3. আয়তক্ষেত্রের কর্ণদ্বয় পরস্পরের সমান হইবে কেন ?

4. ABCD চতুর্ভুজের $AB = DC$ এবং $AD = BC$; BD যুক্ত কর। ADB কোণের সমান অপর কোনও কোণ আছে কি ? ইহা হইতে কি সিদ্ধান্ত করিতে পার ?

চতুর্থ অধ্যায়

বিবিধ অঙ্কন-পদ্ধতি

কোণ-চক্রের সাহায্য না লইয়া কোণ অঙ্কনঃ একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান করিয়া অপর একটি কোণ আঁকিতে হইবে। (To draw an angle equal to a given angle.)



PQR একটি নির্দিষ্ট কোণ, AD একটি সরলরেখা, উহার A বিন্দুতে PQR কোণের সমান করিয়া একটি কোণ আঁকিতে হইবে।

অঙ্কন-পদ্ধতি ঃ Q-কে কেন্দ্র করিয়া যে-কোন ব্যাসার্ধ লইয়া (কম্পাসের সাহায্যে) একটি চাপ আঁক। এই চাপ ∠PQR-এর QP এবং QR বাহুকে যথাক্রমে M, N বিন্দুতে ছেদ করিবে।

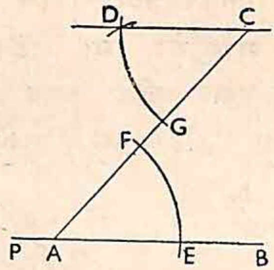
পুনরায় A-কে কেন্দ্র করিয়া একই ব্যাসার্ধ লইয়া (অর্থাৎ কম্পাসের কাঁটা দুইটির মধ্যের ফাঁক অপরিবর্তিত রাখিয়া) একটি চাপ আঁক, উহা AD-কে C বিন্দুতে ছেদ করিল।

আবার কম্পাসের কাঁটার পাদবিন্দু M বিন্দুতে বসাও এবং পেন্সিলের আগাটি N বিন্দুতে টানিয়া আন, তাহা হইলে দুই পাদবিন্দুর দূরত্ব হইবে MN.

এখন C-কে কেন্দ্র করিয়া MN ব্যাসার্ধ লইয়া আরও একটি চাপ আঁক, উহা পূর্বে অঙ্কিত চাপকে যে বিন্দুতে ছেদ করে উহার নাম দেওয়া যাক B; AB যুক্ত কর।

∠DAB, ∠PQR-এর সমান হইবে এবং ইহাই উদ্দিষ্ট কোণ।

সমান্তরাল রেখা অঙ্কন : একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল করিয়া একটি সরলরেখা অঙ্কন করিতে হইবে।



PB একটি সরলরেখা ও C একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

C বিন্দু দিয়া এমন একটি সরলরেখা আঁকিতে হইবে যাহা PB রেখার সমান্তরাল।

অঙ্কন-পদ্ধতি : PB-এর উপর যে-কোন বিন্দু A লও ; AC যুক্ত কর। AC-এর C বিন্দুতে BAC কোণের সমান করিয়া AC-এর যে-পার্শ্বে ∠CAB অবস্থিত তাহার বিপরীত পার্শ্বে একটি কোণ (∠ACD) আঁক।

কোণ অঙ্কনের পদ্ধতি : A-কে কেন্দ্র করিয়া যে-কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ আঁক। এই চাপ ∠BAC-এর AB, AC বাহুদ্বয় যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করিল।

C-কে কেন্দ্র করিয়া একই ব্যাসার্ধ লইয়া অপর একটি চাপ আঁক—উহা CA-কে যে বিন্দুতে ছেদ করিল, মনে কর উহা G.

G-কে কেন্দ্র করিয়া EF ব্যাসার্ধ লইয়া চাপ আঁক, উহা পূর্ববর্তী চাপকে D বিন্দুতে ছেদ করিবে। CD যুক্ত কর। ACD কোণ BAC কোণের সমান হইবে।

তাহা হইলে CD সরলরেখা AB সরলরেখার সমান্তরাল হইবে।

অনুশীলনী

1. কোণ-চক্রের সাহায্যে 60° একটি কোণ আঁক। অপর কোন সরলরেখার উপর কম্পাস ও মাপনীর সাহায্যে এই কোণের সমান করিয়া একটি কোণ আঁক। কোণ-চক্র দিয়া মাপিয়া দেখ উহা 60° হইয়াছে কি না।

2. কোন-চক্রের সাহায্যে 80° একটি কোণ আঁকিয়া উহার একটি বাহুকে প্রসারিত করিয়া সন্নিহিত কোণ নির্দেশ কর। এই সন্নিহিত কোণের সমান করিয়া কম্পাস ও মাপনীর সাহায্যে অপর কোন সরলরেখার কোন বিন্দুতে ঐ সরলরেখার সহিত একটি কোণ আঁক। কোণ-চক্র দিয়া এই অঙ্কিত কোণের মান নির্ণয় কর। উহা 100° হইল কি না দেখ।

3. যে-কোনও একটি কোণ আঁক ; অন্য একটি সরলরেখার সহিত উহার কোন বিন্দুতে এই কোণের দ্বিগুণ কোণ আঁক।

4. একটি ত্রিভুজ আঁকিয়া উহার কৌণিক বিন্দুগুলি দিয়া সম্মুখীন বাহু তিনটির সামান্তরাল রেখা টান।

5. যে-কোন কোণ উৎপন্ন করিয়া দুইটি সরলরেখা টান। এই সরলরেখা দুইটিকে সন্নিহিত বাহু করিয়া একটি সামান্তরিক আঁক।

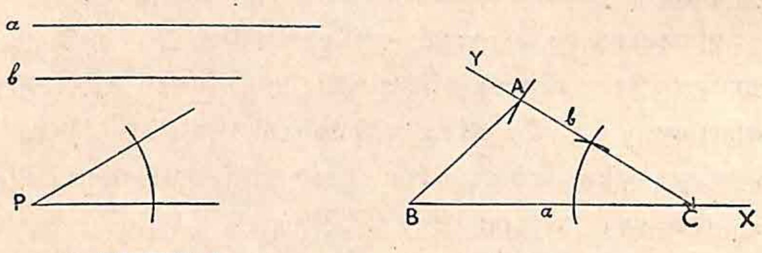
6. কোণ-চক্রের সাহায্যে 45° একটি কোণ আঁক। এই কোণের বাহু-দ্বয়কে সন্নিহিত বাহু করিয়া মাপনী ও কম্পাসের সাহায্যে একটি রম্বস আঁক।

7. এমন একটি সামান্তরিক অঙ্কন কর যাহার একটি কোণ 60° হইবে।

8. মাপনীর সাহায্যে 5·1 সেঃ মিঃ দীর্ঘ একটি সরলরেখা আঁকিয়া উহার একপ্রান্তে কোণচক্রের সাহায্যে 55° কোণ আঁক। এক্ষণে এমন একটি সামান্তরিক আঁক যাহার সন্নিহিত বাহুদ্বয় যথাক্রমে 5·1 এবং 4·6 সেঃ মিঃ দীর্ঘ এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণ 55° হইবে।

মাপনী ও কম্পাসের সাহায্যে ত্রিভুজ অঙ্কন ঃ

1. ত্রিভুজের দুই বাহু ও অন্তর্ভুক্ত কোণ দেওয়া আছে—ত্রিভুজটি আঁকিতে হইবে।



a, b দুইটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের সরলরেখা ও P একটি নির্দিষ্ট কোণ।

এমন একটি ত্রিভুজ আঁকিতে হইবে যাহার দুই বাহু যথাক্রমে a, b-এর সমান ও উহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ ∠P-এর সমান হইবে।

অঙ্কন-পদ্ধতি ঃ যে-কোন সরলরেখা BX টান এবং উহা হইতে a-এর সমান করিয়া কম্পাসের সাহায্যে BC অংশ কাটিয়া লও।

BC-এর C বিন্দুতে কম্পাস ও মাপনীর সাহায্যে ∠P-এর সমান করিয়া ∠BCY আঁক (পূর্ববর্তী অঙ্কন-পদ্ধতি দেখ)।

CY সরলরেখা হইতে b-এর সমান করিয়া CA অংশ কাটিয়া লও। BA যুক্ত কর।

△ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

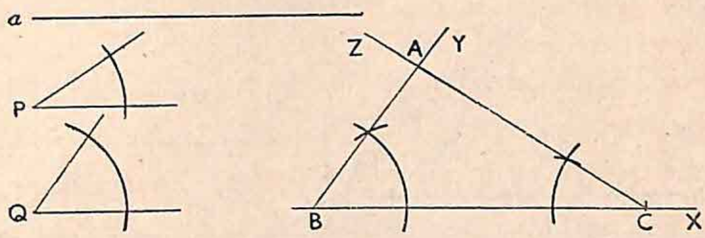
অনুশীলনী

△ABC-এর নিম্নোক্ত বাহু ও কোণ দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কন কর—

1. $a=5$ সেঃ মিঃ $b=4{\cdot}2$ সেঃ মিঃ $\angle C=60^\circ$
2. $b=3{\cdot}6$ সেঃ মিঃ $c=5{\cdot}4$ সেঃ মিঃ $\angle A=55^\circ$
3. $b=c=6$ সেঃ মিঃ $\angle A=80^\circ$।

ত্রিভুজটির ∠B ও ∠C কম্পাসের সাহায্যে মাপিয়া দেখ সমান কিনা।

2. ত্রিভুজের দুই কোণ ও উহাদের সন্নিহিত সাধারণ বাহু দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।



a একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের সরলরেখা এবং ∠P ও ∠Q দুইটি নির্দিষ্ট কোণ। এমন একটি ত্রিভুজ আঁকিতে হইবে যাহার একটি বাহু a-এর সমান ও ঐ বাহুর প্রান্তস্থ কোণদ্বয় যথাক্রমে ∠P ও ∠Q-এর সমান।

অঙ্কন-পদ্ধতি ঃ যে-কোন সরলরেখা BX হইতে a-এর সমান করিয়া BC অংশ কাটিয়া লও।

BC-এর B বিন্দুতে ∠P-এর সমান CBY কোণ এবং C বিন্দুতে ∠Q-এর সমান BCZ কোণ আঁক।

BY, CZ সরলরেখাদ্বয় A বিন্দুতে ছেদ করিলে △ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে।

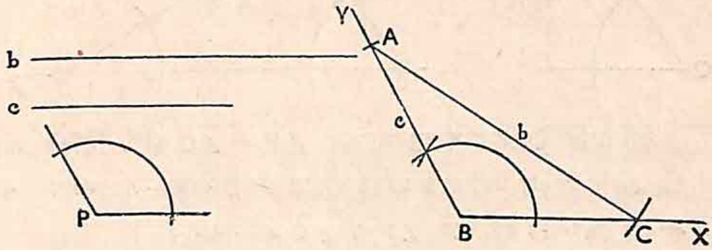
অনুশীলনী

△ABC-এর নিম্নোক্ত বাহু ও কোণের মাপ দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কন কর—

1. $a=5{\cdot}8$ সেঃ মিঃ ∠B = 50° ∠C = 60°
2. $b=4{\cdot}7$ সেঃ মিঃ ∠A = 30° ∠C = 75°
3. $c=4{\cdot}9$ সেঃ মিঃ ∠A = 45° ∠B = 65°
4. $a=6$ সেঃ মিঃ ∠B = ∠C = 60° ;

ত্রিভুজটি আঁকিয়া AB, AC বাহুর দৈর্ঘ্য ও ∠A-এর মান মাপিয়া বাহির কর এবং ত্রিভুজটি সম্বন্ধে কি জানা যাইতেছে উল্লেখ কর।

3. ত্রিভুজের দুইটি বাহু ও উহাদের একটির বিপরীত কোণ (কোণটি সূক্ষ্ম কোণ নহে) দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।



b, c দুইটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের সরলরেখা ($b>c$) ও $\angle$P একটি নির্দিষ্ট কোণ (উহার মান 90° অপেক্ষা কম নহে)।

এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করিতে হইবে যাহার বাহুদ্বয় যথাক্রমে b ও c-এর সমান এবং এই বাহুদ্বয়ের বৃহত্তর (b)-এর সম্মুখীন কোণ $\angle$P-এর সমান।

অঙ্কন-পদ্ধতি ঃ যে-কোন সরলরেখা BX-এর B বিন্দুতে $\angle$P-এর সমান করিয়া $\angle$CBY আঁক।

এই কোণের BY বাহু হইতে c-এর সমান করিয়া BA অংশ কাটিয়া লও।

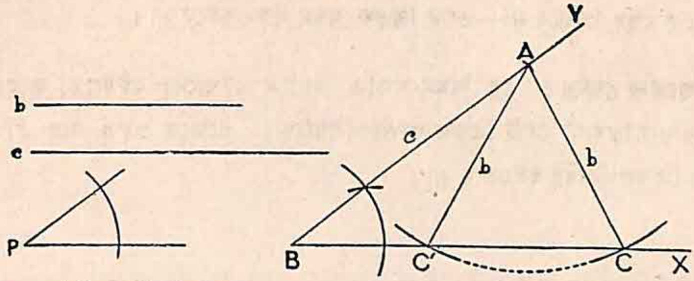
A-কে কেন্দ্র করিয়া b ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ আঁক, উহা BX-কে যে বিন্দুতে ছেদ করিবে, উহার নাম দাও C ;

AC যুক্ত কর।

$\triangle$ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

মন্তব্য ঃ অতিভুজ ও অপর একটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া থাকিলে এই পদ্ধতিতে সমকোণী ত্রিভুজ আঁকা যাইবে। (54 পৃষ্ঠার অনুশীলনী 4 দেখ)

4. ত্রিভুজের দুইটি বাহু এবং উহাদের একটির বিপরীত কোণ (সূক্ষ্মকোণ) দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁকিতে হইবে।



b, c দুইটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের সরলরেখা $(b<c)$ ∠P একটি নির্দিষ্ট সূক্ষ্মকোণ। এমন একটি ত্রিভুজ আঁকিতে হইবে যাহার বাহুদ্বয় যথাক্রমে b এবং c-এর সমান ও ইহাদের একটির সম্মুখীন কোণ ∠P-এর সমান।

অঙ্কন-পদ্ধতি ঃ যে-কোন সরলরেখা BX টান এবং উহার B বিন্দুতে ∠P-এর সমান ∠CBY আঁক।

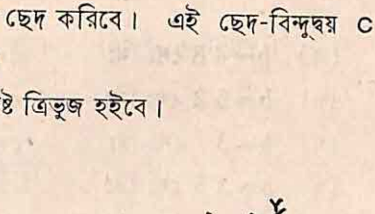
এই কোণের BY বাহু হইতে c-এর সমান করিয়া AB অংশ টান।

A-কে কেন্দ্র করিয়া b-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ আঁক। এই চাপ BX সরলরেখাকে সাধারণতঃ দুই বিন্দুতে ছেদ করিবে। এই ছেদ-বিন্দুদ্বয় C এবং C′ হইলে, AC এবং AC′ যুক্ত কর।

△ABC এবং △ABC′ উভয়েই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে।

বিশেষ ক্ষেত্র ঃ

(i) b বাহুর দৈর্ঘ্য আরও কম হইলে এমন হইতে পারে যে A-কে কেন্দ্র করিয়া b ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত চাপ BX-কে একটিমাত্র বিন্দুতে স্পর্শ করিবে; সে ক্ষেত্রে একটি মাত্র সমাধানই সম্ভব এবং ত্রিভুজটি সমকোণী হইবে।



(*ii*) b-বাহুর দৈর্ঘ্য A-বিন্দু হইতে BX-এর উপর যে লম্ব অঙ্কিত হইতে পারে তাহা অপেক্ষা ছোট হইলে A-কে কেন্দ্র করিয়া b ব্যাসার্ধসহ অঙ্কিত চাপ BX-কে ছেদ করিবে না—তখন ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব হইবে না।

দ্ব্যর্থক ক্ষেত্র ঃ যে অঙ্কন-পদ্ধতি এখানে দেখানো হইয়াছে, তাহাতে প্রদত্ত মাপানুযায়ী দুইটি ত্রিভুজ পাওয়া গিয়াছে। এক্ষেত্রে প্রদত্ত অঙ্গ তিনটি দ্বারা ত্রিভুজ নির্দিষ্ট হইতেছে না।

অনুশীলনী

1. ABC ত্রিভুজের নিম্নোক্ত বাহু ও কোণ দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। কোথায় কি আকৃতির ত্রিভুজ পাওয়া যাইতেছে বা দ্ব্যর্থক ক্ষেত্র আছে কিনা উল্লেখ কর।

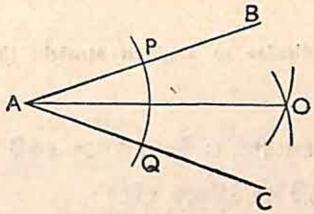
(ক) $b=4{\cdot}8$ সেঃ মিঃ	$c=3{\cdot}4$ সেঃ মিঃ	$\angle B=100^\circ$
(খ) $b=5{\cdot}2$ সেঃ মিঃ	$c=3{\cdot}5$ সেঃ মিঃ	$\angle B=120^\circ$
(গ) $b=3$ সেঃ মিঃ	$c=6$ সেঃ মিঃ	$\angle B=30^\circ$
(ঘ) $b=3{\cdot}5$ সেঃ মিঃ	$c=5$ সেঃ মিঃ	$\angle B=25^\circ$
(ঙ) $b=5$ সেঃ মিঃ	$c=4$ সেঃ মিঃ	$\angle B=30^\circ$

2. ABC ত্রিভুজের $\angle B=90^\circ$, c বাহু 3 সেঃ মিঃ এবং b বাহু 5 সেঃ মিঃ ; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

3. ABC ত্রিভুজের $b=c=4$ সেঃ মিঃ ; $\angle B=60^\circ$; ত্রিভুজটি অঙ্কন করিয়া $\angle C$ মাপিয়া দেখ। ইহা হইতে কি জানা যাইতেছে নির্দেশ কর।

একটি নির্দিষ্ট কোণকে সম-দ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

[To biscet a given angle.]



∠BAC একটি নির্দিষ্ট কোণ, কম্পাস ও মাপনীর সাহায্যে উহাকে সম-দ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন-পদ্ধতি ঃ ∠BAC কোণের শীর্ষবিন্দু A-কে কেন্দ্র করিয়া যে-কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ আঁক, উহা AB ও AC বাহুদ্বয়কে যে বিন্দুদ্বয়ে ছেদ করিল উহার নাম দেওয়া যাক যথাক্রমে P ও Q।

P, Q বিন্দুদ্বয়কে যথাক্রমে কেন্দ্র করিয়া ও উভয়ক্ষেত্রে P, Q-এর অর্ধাংশের চেয়ে বড় একই ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি চাপ আঁক ; উহাদের ছেদবিন্দু O ; AO যুক্ত কর।

AO সরলরেখা BAC কোণকে সমান দুইভাগে বিভক্ত করিয়াছে।

অনুশীলনী

1. একটি সূক্ষ্ম কোণ আঁক। এই কোণের একটি বাহু বর্ধিত করিয়া কোণটির সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন কর। মূল সূক্ষ্ম কোণ ও তাহার সন্নিহিত কোণের দুইটি সম-দ্বিখণ্ডক আঁক।

সম-দ্বিখণ্ডকদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণটি কোণ-চক্র দিয়া মাপিয়া দেখ।

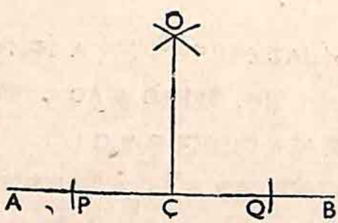
2. একটি ত্রিভুজ আঁক। ত্রিভুজের কোণগুলির সম-দ্বিখণ্ডক টান। সম-দ্বিখণ্ডক তিনটির ভিতর কি সম্বন্ধ পাওয়া যাইতেছে উল্লেখ কর।

লম্ব অঙ্কন

কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার নির্দিষ্ট বিন্দুতে উহার উপর একটি লম্ব টানিতে হইবে।

[To draw a perpendicular to a given straight line at a given point in it.]

AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা, C উহার উপরে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। C বিন্দু দিয়া AB-এর উপরে একটি লম্ব টানিতে হইবে।



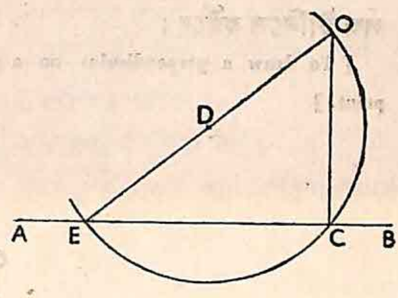
অঙ্কন-পদ্ধতি ঃ C বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী ও AB রেখার উপরে অবস্থিত দুইটি বিন্দুর অবস্থান নির্দিষ্ট করিবার জন্য C-কে কেন্দ্র করিয়া যে-কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ আঁক। উহা যদি AB-কে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে তবে P ও Q, C হইতে সমদূরবর্তী।

[C যদি AB-এর এক প্রান্তে অবস্থিত হয় তবে উহাকে ইচ্ছামত বর্ধিত করিয়া লও, যাহাতে অঙ্কিত চাপ AB-কে দুই বিন্দুতে ছেদ করে।]

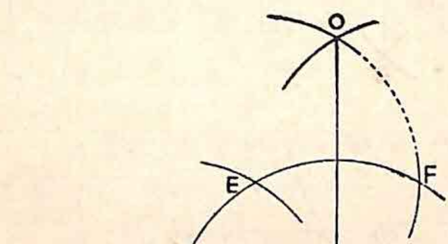
P ও Q বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া উভয়ক্ষেত্রে CP হইতে দীর্ঘতর একই ব্যাসার্ধ লইয়া AB-এর একই পার্শ্বে যথাক্রমে দুইটি চাপ আঁক। এই চাপদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করিল। OC যুক্ত কর। OC রেখা উদ্দিষ্ট লম্ব।

বিকল্প পদ্ধতি ঃ যদি C বিন্দু AB-এর এক প্রান্তে অবস্থিত হয়, তবে

(1) AB-এর বাহিরে যে-কোন স্থানে D বিন্দু লও। D-কে কেন্দ্র করিয়া DC ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ (অর্ধবৃত্তের চেয়ে বড়) আঁক। উহা AB-কে C ও E বিন্দুতে ছেদ করিবে। ED যুক্ত করিয়া বর্ধিত কর যাহাতে উহা অঙ্কিত চাপকে O বিন্দুতে ছেদ করে। OCE একটি অর্ধবৃত্ত হইবে। OC যুক্ত কর। OC উদ্দিষ্ট লম্ব।



(2) C বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া যে-কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ আঁক ; উহা AB-কে D বিন্দুতে ছেদ করিল। D বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া একই ব্যাসার্ধ সহ আরও একটি চাপ আঁক, উহা প্রথমে অঙ্কিত চাপকে E বিন্দুতে ছেদ করিল।

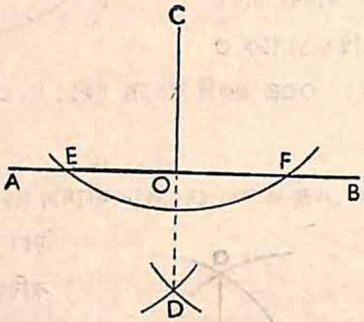


E-কে কেন্দ্র করিয়া একই ব্যাসার্ধ লইয়া আরও একটি চাপ আঁক। উহা প্রথমে অঙ্কিত চাপকে F বিন্দুতে ছেদ করিল।

F-কে কেন্দ্র করিয়া একই ব্যাসার্ধসহ আরও একটি চাপ আঁক। উহা E-কে কেন্দ্র করিয়া অঙ্কিত চাপকে O বিন্দুতে ছেদ করিলে OC উদ্দিষ্ট লম্ব।

কোনও সরলরেখার উপরে বহিঃস্থ কোনও নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে লম্ব টানিতে হইবে।

[To draw a perpendicular on a given straight line from a given external point.]



AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা ও C একটি বহিঃস্থ বিন্দু।

C হইতে AB-এর উপরে লম্ব টানিতে হইবে।

অঙ্কন-পদ্ধতি : C-কে কেন্দ্র করিয়া প্রয়োজনানুযায়ী ব্যাসার্ধ লইয়া এমন একটি চাপ আঁক যাহা AB-কে দুই বিন্দুতে (E, F) ছেদ করিবে।

E ও F-কে যথাক্রমে কেন্দ্র করিয়া এবং উভয় ক্ষেত্রে EF-এর অর্ধাংশের চেয়ে বৃহত্তর যে-কোন ব্যাসার্ধ লইয়া AB-এর যে-পার্শ্বে C অবস্থিত উহার বিপরীত পার্শ্বে দুইটি চাপ আঁক। উহাদের ছেদবিন্দু D নির্ণয় কর।

CD যুক্ত কর। CD সরলরেখা AB-কে O বিন্দুতে ছেদ করিলে AB-এর উপর CO লম্ব হইবে।

অনুশীলনী

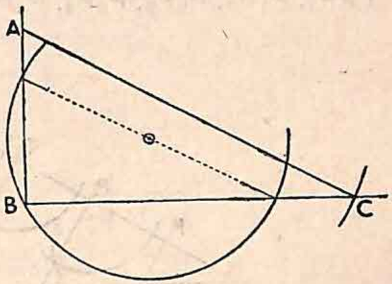
1. একটি সরলরেখার উপরে কোনও বিন্দুতে একটি 45° কোণ আঁক।
[সরলরেখার উপরে একটি লম্ব টান এবং উৎপন্ন কোণকে দ্বিখণ্ডিত কর।]

2. একটি সরলরেখার উপরে একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

3. একটি বর্গক্ষেত্রকে চারিটি সমান বর্গক্ষেত্রে বিভক্ত কর।

4. সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর একটি বাহু দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

BC সরলরেখার B বিন্দুতে একটি লম্ব আঁক। লম্ব BA-এর দৈর্ঘ্য ত্রিভুজটির প্রদত্ত বাহুর সমান করিয়া কাট।



A বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া অতিভুজের সমান ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তচাপ, BC-কে C বিন্দুতে ছেদ করিবে। AC যুক্ত কর। △ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

5. AB সরলরেখার বাহিরে একটি বিন্দু C লও। C হইতে AB-এর উপর লম্ব টান। C বিন্দু হইতে AB-এর দূরত্ব মাপিয়া বাহির কর।

6. ABC একটি ত্রিভুজ। A, B, C বিন্দুত্রয় হইতে যথাক্রমে BC, CA, AB-এর উপর লম্ব অঙ্কন কর।

7. কোণচক্রের সাহায্য না লইয়া এমন একটি সামান্তরিক অঙ্কন কর যাহার একটি কোণ 135° হইবে।

একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন কর।

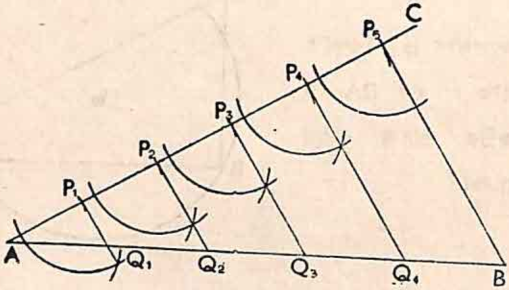
কোন সসীম সরলরেখাকে নির্দিষ্ট সংখ্যক সমান অংশে বিভক্ত করিতে হইবে।

[**To divide a given straight line into any number of equal parts.**]

AB একটি সরলরেখা।

ইহাকে নির্দিষ্ট সংখ্যক (ধর পাঁচটি) সমান অংশে বিভক্ত করিতে হইবে।

প্রথম পদ্ধতি ঃ AB-এর সঙ্গে যে-কোন কোণ করিয়া A বিন্দু দিয়া AC সরলরেখা টান। উহা হইতে যে-কোনও মাপের পর পর পাঁচটি সমান অংশ (AP_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_5) কাটিয়া লও।



BP_5 যুক্ত কর। P_1, P_2, P_3, P_4 বিন্দু চতুষ্টয় হইতে BP_5-এর সমান্তরাল করিয়া চারিটি সরলরেখা আঁক। উহারা যথাক্রমে P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3, P_4Q_4, হইলে এবং উহারা AB-কে Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 বিন্দুতে ছেদ করিলে AQ_1, Q_1Q_2, Q_2Q_3, Q_3Q_4, Q_4B অংশগুলি সমান হইবে।

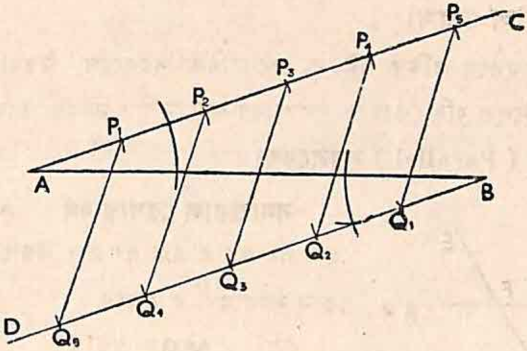
AB সরলরেখা Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 বিন্দুতে পাঁচটি সমান অংশে বিভক্ত হইবে।

দ্বিতীয় পদ্ধতি ঃ ধর AB-কে ছয়টি সমান খণ্ডে ভাগ করিতে হইবে।

AB সরলরেখার সঙ্গে যে কোন কোণ করিয়া A বিন্দু হইতে AC সরলরেখা টান।

AC হইতে যে-কোনও দৈর্ঘ্যের পর পর পাঁচটি সমান অংশ (AP_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_5) কাটিয়া লও।

B বিন্দু হইতে AC-এর সমান্তরাল করিয়া BD রেখা টান। BD হইতে AC-এর অংশগুলির সমান করিয়া BQ_1, Q_1Q_2, Q_2Q_3, Q_3Q_4, Q_4Q_5 পাঁচটি অংশ কাট।



P_5Q_1, P_4Q_2, P_3Q_3, P_2Q_4, P_1Q_5 যুক্ত করিয়া সরলরেখা টান, ইহারা AB-কে সমান ছয় অংশে বিভক্ত করিবে।

মন্তব্য ঃ কোন সরলরেখাকে সমান দুই, চার কিংবা আট ভাগে বিভক্ত করিবার অন্য প্রকার পদ্ধতি ষষ্ঠ শ্রেণীতে শিখিয়াছ। এইটি আর একটি বিশেষ পদ্ধতি।

অনুশীলনী

1. একটি 16 সেঃ মিঃ সরলরেখা লও। উহা 7 সমান ভাগে বিভক্ত কর।

2. একটি সরলরেখা হইতে উহার (ক) $\frac{2}{5}$ অংশ এবং (খ) $\frac{4}{9}$ অংশ কাটিয়া বাহির কর।

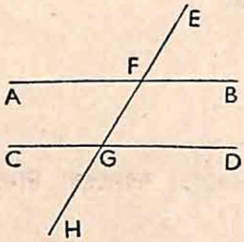
3. একটি 15 সেঃ মিঃ সরলরেখা লও। উহাকে এমন দুই ভাগে ভাগ কর যেন এক ভাগ অপর ভাগের (ক) $\frac{3}{5}$, (খ) $\frac{3}{7}$, (গ) $\frac{4}{5}$ ভাগ হয়।

পঞ্চম অধ্যায়

ত্রিভুজের কোণ-সমষ্টি ও সমান্তরাল রেখার ধর্মের প্রয়োগ

সমান্তরাল রেখা

একই সমতলে অঙ্কিত দুই বা ততোধিক সরলরেখা উভয়দিকে যথেচ্ছা বাড়াইয়া দিলেও যদি কোথাও পরস্পরের সঙ্গে মিলিত না হয়, তবে তাহাদিগকে **সমান্তরাল (Parallel) সরলরেখা** বলে।



সমান্তরাল রেখার ধর্ম ঃ AB, CD দুইটি রেখা সমান্তরাল এবং EFGH উহাদের ছেদকারী কোন সরলরেখা বা ভেদক।

(ক) ∠AFG = একান্তর ∠FGD এবং ∠BFG = একান্তর ∠FGC।

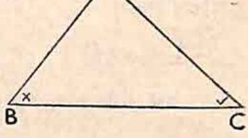
(খ) ∠EFB = বিপরীত অন্তঃকোণ FGD
∠EFA = বিপরীত অন্তঃকোণ FGC

(গ) ∠BFG, ∠FGD কোণদ্বয় একত্রযোগে দুই সমকোণ
∠AFG, ∠FGC কোণদ্বয় একত্রযোগে দুই সমকোণ

ত্রিভুজের কোণসমষ্টি

সমান্তরাল রেখার ধর্ম প্রয়োগ করিয়া ত্রিভুজের কোণসমষ্টি নির্ণয় কর।

প্রথম পদ্ধতি ঃ



ধর ABC একটি ত্রিভুজ।

ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A।

A বিন্দু দিয়া EAD সরলরেখা BC-এর সঙ্গে সমান্তরাল করিয়া টান।

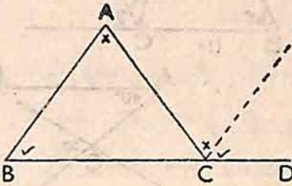
ED ও BC রেখা সমান্তরাল, AB উহাদের ভেদক ; সুতরাং সমান্তরাল রেখার ধর্ম অনুসারে ∠ABC = একান্তর ∠EAB।

আবার ED, BC রেখা সমান্তরাল, AC উহাদের ভেদক ; সুতরাং ∠ACB = একান্তর ∠CAD

স্বতরাং ∠ABC + ∠BAC + ∠ACB
= ∠EAB + ∠BAC + ∠CAD
= সরলকোণ EAD
= দুই সমকোণ ।

দ্বিতীয় পদ্ধতি ঃ

অথবা ধর ABC ত্রিভুজের BC বাহু D পর্যন্ত বর্ধিত হইয়াছে ।



স্পষ্টতঃই ∠BCD সরলকোণ
= দুই সমকোণ ।

C বিন্দু দিয়া AB-এর সমান্তরাল CE সরলরেখা টান ।

AB, CE সমান্তরাল ; AC উহাদের ভেদক ; স্বতরাং ∠ACE = একান্তর ∠BAC ।

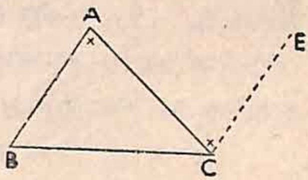
আবার, AB, CE সমান্তরাল ; BC উহাদের ভেদক ;

অতএব ∠ECD = বিপরীত অন্তঃকোণ ABC ।

স্বতরাং ∠BAC + ∠ABC + ∠ACB = ∠ACE + ∠ECD + ∠ACB
= সরলকোণ BCD
= দুই সমকোণ ।

তৃতীয় পদ্ধতি ঃ

কিংবা ধর ABC ত্রিভুজের C বিন্দু দিয়া AB বাহুর সমান্তরাল CE টানা হইয়াছে ।



∠BAC = একান্তর ∠ACE

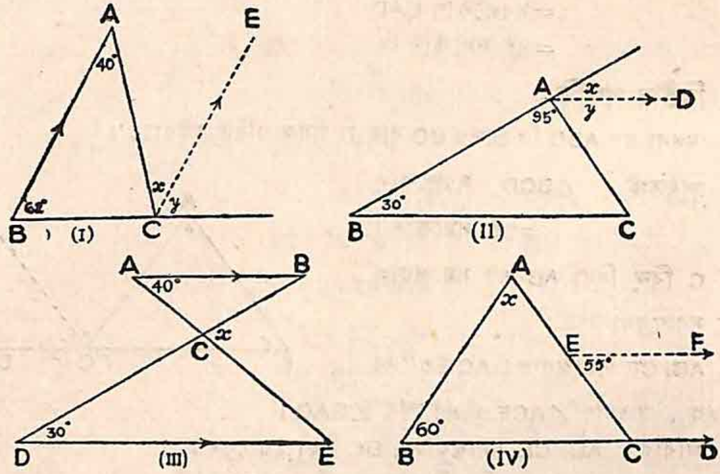
এবং অন্তঃকোণদ্বয় ABC + ECB = দুই সমকোণ ।

কিন্তু ∠ECB = ∠ACB + ∠ACE
= ∠ACB + ∠BAC

∴ ∠ABC + ∠ACB + ∠BAC = দুই সমকোণ ।

অনুশীলনী

নিম্নে অঙ্কিত ত্রিভুজগুলিতে x, y দ্বারা নির্দিষ্ট কোণগুলির মান নির্ণয় কর। তীর-চিহ্নিত রেখাযুগল সমান্তরাল করিয়া টানা হইয়াছে।



ষষ্ঠ অধ্যায়

ক্ষেত্রফল নির্ণয়

ক্ষেত্রফল

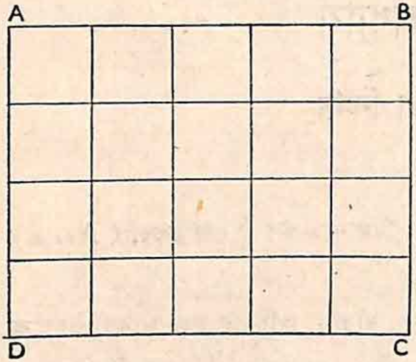
কোন ক্ষেত্র দ্বারা অধিকৃত স্থানের পরিমাণকে উহার **ক্ষেত্রফল (Area)** বলা হয়।

কোন ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কতটা, তাহা ধারণা করিবার জন্য আমরা উহাকে কোন পরিচিত জিনিসের সঙ্গে তুলনা করি। মনে কর, টেবিলের উপরিতলের ক্ষেত্রফলের পরিমাপ করিবার জন্য আমরা টেবিলের উপরে পাশাপাশি কতকগুলি পোস্টকার্ড বিছাইয়া দিয়া টেবিলের পৃষ্ঠকে সম্পূর্ণ ঢাকিয়া দিতে পারি। যদি এমন করিয়া ঢাকিতে পুরোপুরি পনর খানা পোস্টকার্ড লাগে তবে টেবিলের ক্ষেত্রফল ঐ পোস্টকার্ডের তুলনায় পনর গুণ।

এই প্রকার তুলনা করিবার জন্য সর্বাপেক্ষা ছোট যে ক্ষেত্রটি ব্যবহার করা হয় তাহার নাম একক ক্ষেত্র। কাজের সুবিধার জন্য বর্গক্ষেত্রকে এককরূপে ব্যবহার করা হয়। ক্ষেত্রফলের একক হিসাবে এক সেন্টিমিটার বাহু সম্বলিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বা অধিকৃত স্থানকে এক বর্গ সেন্টিমিটার কিংবা এক ইঞ্চি বাহু সম্বলিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলকে এক বর্গ ইঞ্চি বলা হয়। এইরূপ এক বর্গফুট, এক বর্গগজ কিংবা এক বর্গমাইল প্রভৃতিকেও ক্ষেত্রের একক ধরা যাইতে পারে। ছোট আকারে ক্ষেত্র মাপিতে ছোট একক এবং বৃহদাকৃতি ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল মাপিতে বড় একক ব্যবহার করা হয়।

মনে কর, 5 সেঃ মিঃ দীর্ঘ, 4 সেঃ মিঃ প্রস্থ একটি আয়তক্ষেত্র (ABCD) আছে। AB বাহুকে পাঁচটি এবং BC বাহুকে চারিটি সমান ভাগে বিভক্ত কর। এইসব বিন্দু দিয়া আয়তক্ষেত্রের বাহুর সঙ্গে সমান্তরাল রেখা টানিলে আয়তক্ষেত্র

কতকগুলি ছোট ছোট বর্গক্ষেত্রে বিভক্ত হইবে, যাহাদের প্রত্যেকের বাহু এক সেন্টিমিটার দীর্ঘ। ইহাদের প্রত্যেকের ক্ষেত্রফল এক বর্গ-সেন্টিমিটার। সহজ হিসাবেই পাওয়া যাইবে যে আয়তক্ষেত্রের ভিতর এইরূপ 4×5=20 সংখ্যক বর্গক্ষেত্র আছে। অতএব আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল 20 বর্গ সেন্টিমিটার।



এইভাবে ক্ষেত্রটিকে একক বর্গক্ষেত্রে বিভক্ত না করিয়া অনুরূপ একক বর্গক্ষেত্র আঁকা কাগজ বা বোর্ডের উপর ক্ষেত্রটিকে বসাইয়া দিলে উহার ভিতরে কতগুলি একক বর্গক্ষেত্র পড়ে তাহা সহজে গণনা করিয়া জানা যাইবে। ইহা হইতে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যাইবে। এইরূপ বর্গক্ষেত্র আঁকা কাগজকে ছক-কাগজ বলা হয়।

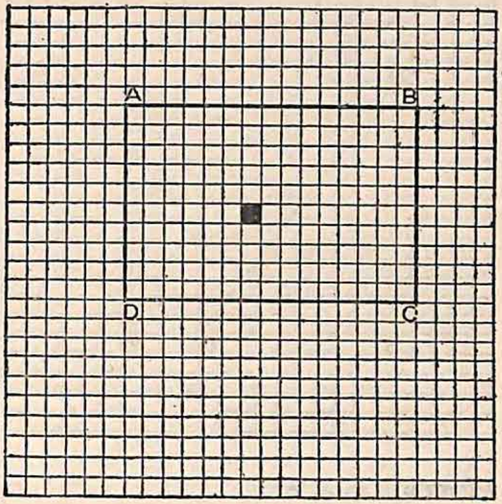
আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

পরবর্তী পৃষ্ঠার চিত্রে ABCD আয়তক্ষেত্রটি ছক কাগজের উপর আঁকা হইয়াছে। গণনা করিয়া দেখ, চিত্রে প্রদর্শিত কালো-চিহ্নিত বর্গক্ষেত্রের সমান বর্গক্ষেত্র ABCD আয়তক্ষেত্রের ভিতর কতগুলি আছে। ইহার সংখ্যা হইবে 150 ; অতএব আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 150 বর্গ একক।

এখানে বর্গক্ষেত্রের সংখ্যা গণনা কাজটি কোন সহজ উপায়ে করিতে পার কি ? দেখ, তাহা পারা যাইবে। গণিয়া দেখ AB বাহুর দৈর্ঘ্য 15 একক এবং BC বাহু 10 একক দীর্ঘ। স্পষ্টই দেখিতেছ যে 15×10=150 ; সুতরাং বর্গক্ষেত্রের সংখ্যা গণনা না করিয়াও আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য × প্রস্থ গুণন করিয়া পাওয়া যাইতে পারে।

আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ

যে-কোন মাপের আয়তক্ষেত্র ছক-কাগজে আঁকিয়া ক্ষেত্রফল সম্বন্ধে এই সত্যতা পরীক্ষা করিতে পারিবে।



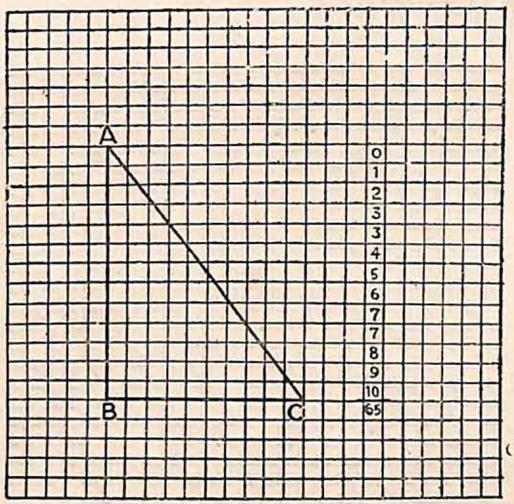
মন্তব্য ঃ আয়তক্ষেত্রটির প্রকৃত ক্ষেত্রফল কত তাহা নির্ণয় করিতে হইলে একক বর্গক্ষেত্রগুলির বাহুর দৈর্ঘ্য জানিতে হইবে। যদি চিত্রে প্রদর্শিত একক বর্গক্ষেত্রের বাহুগুলি $\frac{1}{4}$ সেঃ মিঃ দীর্ঘ হয়, তবে প্রতিটির ক্ষেত্রফল $\frac{1}{10}$ বর্গ সেঃ মিঃ এবং তাহা হইলে আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $150 \times \frac{1}{16} = 9{\cdot}375$ বর্গ-সেন্টিমিটার হইবে।

সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

ছক-কাগজের উপর অঙ্কিত পরবর্তী পৃষ্ঠায় প্রদর্শিত ABC ত্রিভুজটি সমকোণী।

ত্রিভুজের ভিতরে কতগুলি বর্গক্ষেত্র আছে তাহা গণনা করিয়া দেখ। এখানে একটু অসুবিধা হইবে। লক্ষ্য করিলে দেখিবে কতকগুলি বর্গক্ষেত্রের কতক

অংশ মাত্র ত্রিভুজের ভিতরে পড়িয়াছে। উহাদের কি ভাবে গণনা করা যাইবে ? মোটামুটি হিসাব পাইতে হইলে নিম্নে বর্ণিত পদ্ধতিতে গণনা কর।



(1) পূর্ণ বর্গক্ষেত্রগুলি গণনা কর।

(2) যে-সব বর্গক্ষেত্রের অর্ধেক বা তাহার বেশী অংশ ত্রিভুজের ভিতরে আছে সেগুলিকে পূর্ণ বর্গক্ষেত্র ধরিয়া গণনা কর ; এবং যেগুলির অর্ধেকের কম অংশ ত্রিভুজের ভিতরে পড়িয়াছে সেগুলি গণনা হইতে বাদ দাও।

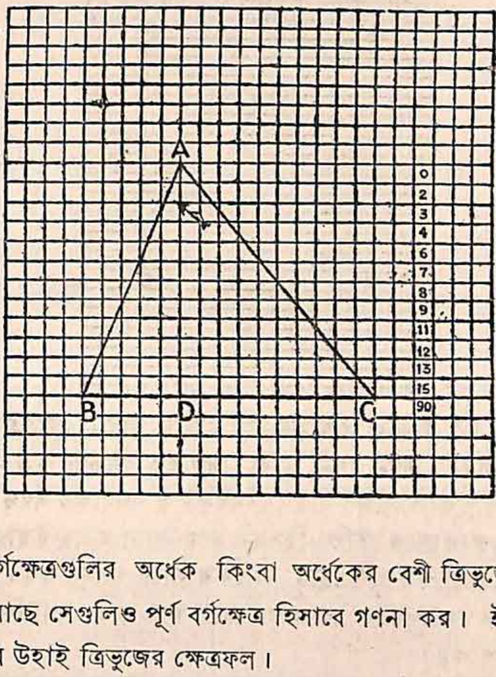
এইভাবে গণনা করিলে অঙ্কিত ত্রিভুজে 65 সংখ্যক বর্গক্ষেত্র পাওয়া যাইবে। অতএব ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 65 বর্গ একক।

বর্গক্ষেত্রগুলি গণনা না করিয়াও কিন্তু সহজ উপায়ে 65 সংখ্যাটি পাইতে পার। গণনা করিয়া দেখ BC-এর দৈর্ঘ্য 10 একক এবং AB সরলরেখা 13 একক দীর্ঘ। 13×10-কে 2 দিয়া ভাগ করিলে 65 পাওয়া যায়।

লক্ষ্য করিতে পার যে AB ও BC সমকোণ-সংলগ্ন বাহুদ্বয়। সুতরাং **সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল পাইতে হইলে সমকোণ-সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য গুণন করিয়া তাহার অর্ধেক কর।**

সাধারণ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

নীচের চিত্রে ABC ত্রিভুজটি ছক-কাগজের উপর বসানো হইয়াছে। ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের জন্য ত্রিভুজের ভিতরে যতগুলি পূর্ণ বর্গক্ষেত্র আছে তাহার সংখ্যা গণনা



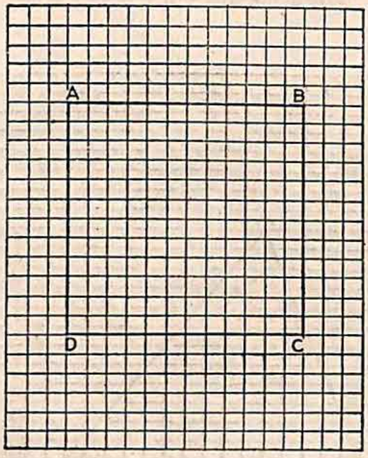
কর। যে-বর্গক্ষেত্রগুলির অর্ধেক কিংবা অর্ধেকের বেশী ত্রিভুজের সীমারেখার ভিতরে পড়িয়াছে সেগুলিও পূর্ণ বর্গক্ষেত্র হিসাবে গণনা কর। ইহাতে যতগুলি বর্গক্ষেত্র হইবে উহাই ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল।

অনুরূপ গণনায় পাওয়া যাইবে যে অঙ্কিত ABC ত্রিভুজের মধ্যে 90 সংখ্যক বর্গক্ষেত্র আছে ; অতএব উহার ক্ষেত্রফল 90 বর্গ একক।

এখন লক্ষ্য করিয়া দেখ AD সরলরেখা BC-এর লম্ব। AD-এর দৈর্ঘ্য 12 একক এবং BC-এর দৈর্ঘ্য 15 একক। $12 \times 15 = 180$ এবং উহার অর্ধেক 90 ; BC-কে ত্রিভুজের ভূমি বলিলে AD-কে উহার উচ্চতা বলা হইবে। সুতরাং **ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ (উচ্চতা $\times$ ভূমি)।**

অনুশীলনী

1. নীচের চিত্রে প্রদর্শিত ছক-কাগজে ছোট বর্গক্ষেত্রের বাহুকে এক ইঞ্চি দীর্ঘ মনে কর। তাহা হইলে এখানে যে বর্গক্ষেত্রটি (ABCD) আঁকা হইয়াছে উহার



প্রত্যেকটি বাহু 12 ইঞ্চি বা এক ফুট দীর্ঘ বলিতে পার। অতএব ABCD-এর ক্ষেত্রফল এক বর্গফুট। এখন গণনা করিয়া দেখ এক বর্গফুটে কত বর্গ ইঞ্চি হয়।

2. এইরূপ ছক-কাগজের সাহায্যে বর্গফুট ও বর্গগজের সম্বন্ধ নির্ণয় কর।

3. যে ছক-কাগজে ইঞ্চি হিসাবে দাগ কাটা আছে উহার একখণ্ড লও এবং এক বর্গইঞ্চিতে কতগুলি ছোট বর্গক্ষেত্র আছে গণনা কর। তাহা হইলে এক একটি ছোট বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত হয় তাহা বর্গইঞ্চির ভগ্নাংশে বা দশমিকে প্রকাশ কর।

4. ছক-কাগজের ছোট বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য 0·1 ইঞ্চি ধরিয়া 2·2 ইঞ্চি দীর্ঘ এবং 1·8 ইঞ্চি প্রস্থ একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কন করিয়া উহার ভিতরে কতগুলি ছোট বর্গক্ষেত্র আছে গণনা কর এবং পূর্ববর্তী প্রশ্নের উত্তরের সাহায্যে আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল বর্গ ইঞ্চিতে প্রকাশ কর।

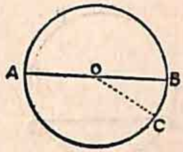
5. ছক-কাগজের ছোট বর্গক্ষেত্রের বাহুকে এক ফুট মনে করিয়া 12 গজ দীর্ঘ এবং 7 গজ প্রস্থ একটি আয়তক্ষেত্রের নক্সা অঙ্কন কর এবং উহার ক্ষেত্রফল বর্গফুটে নির্ণয় কর।

সপ্তম অধ্যায়

বৃত্তাঙ্কন ও বৃত্তসম্বন্ধীয় বিবিধ তথ্য

সংজ্ঞা

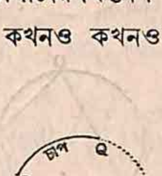
বৃত্ত ঃ যে সমতল ক্ষেত্র এরূপ একটি বক্ররেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ যাহার প্রত্যেক বিন্দু ঐ ক্ষেত্রের অভ্যন্তরস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী তাহাকে **বৃত্ত (Circle)** বলে। বক্র-রেখাটি বৃত্তের **পরিধি (Circumference),** এবং নির্দিষ্ট বিন্দুটি [O] বৃত্তের **কেন্দ্র (Centre)।**



কেন্দ্র হইতে পরিধি পর্যন্ত অঙ্কিত যে-কোন সরলরেখা [OC] বৃত্তের **ব্যাসার্ধ** বা **অর (Radius),** এবং উভয়পার্শ্বে পরিধি পর্যন্ত বিস্তৃত যে-কোন কেন্দ্রবিন্দুগামী সরলরেখা [AOB] **ব্যাস (Diameter)।**

স্পষ্টতঃ বৃত্তের সকল ব্যাসার্ধই সমান এবং ব্যাসের দৈর্ঘ্য ব্যাসার্ধের দ্বিগুণ। বৃত্ত বলিতে পরিধিদ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকেই বুঝায়, কিন্তু কখনও কখনও বৃত্তদ্বারা কেবলমাত্র পরিধিকেই বুঝান হয়।

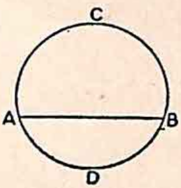
বৃত্তের পরিধির যে-কোন অংশ [PQ]কে **চাপ (Arc)** এবং পরিধির উপর যে-কোন দুই বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা [AB]কে বৃত্তের **জ্যা (Chord)** বলে। বৃত্তের ব্যাস উহার কেন্দ্রগামী একটি জ্যা।



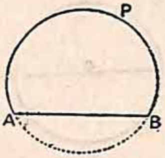
বৃত্তের যে-কোন ব্যাস বৃত্তটিকে যে সমান দুই অংশে বিভক্ত করে তাহার প্রতি অংশ [ECF]কে **অর্ধবৃত্ত (Semi-circle)** বলে। বৃত্তের ব্যাস



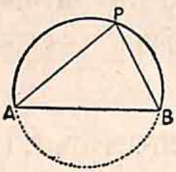
নহে এরূপ যে-কোন জ্যা সমগ্র পরিধিকে যে দুইটি চাপে বিভক্ত করে, তন্মধ্যে একটি চাপ পরিধির অর্ধাংশ অপেক্ষা বৃহত্তর এবং অপরটি তদপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ; অর্ধপরিধি অপেক্ষা বৃহত্তর চাপটিকে [ACB] **অধিচাপ (Major arc)** এবং অর্ধপরিধি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর চাপটিকে [ADB] **উপচাপ (Minor arc)** বলে। এরূপ দুইটি চাপকে পরস্পর **অনুবন্ধী (Conjugate)** বলে।



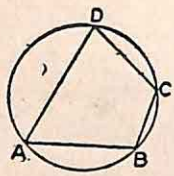
বৃত্তের কোন জ্যা বৃত্তটিকে যে দুই অংশে বিভক্ত করে তাহার যে-কোনটিকে [APB] **বৃত্তাংশ (Segment of a circle)** বলে। সুতরাং, জ্যা ও চাপ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের নাম বৃত্তাংশ।



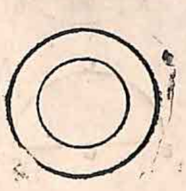
একটি বৃত্তাংশে চাপের উপর কোন বিন্দুর সহিত জ্যা-এর প্রান্তবিন্দুদ্বয় যুক্ত করিলে ঐ দুই সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণকে [∠APB] **বৃত্তাংশস্থিত কোণ (Angle in a segment)** বলে।



যে চতুর্ভুজের [ABCD] শীর্ষবিন্দুগুলি কোন বৃত্তের পরিধির উপর অবস্থিত বা যাহার শীর্ষবিন্দুগুলি দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন করা যায় তাহাকে **বৃত্তস্থ (Cyclic)** চতুর্ভুজ বলে।



যে-সকল বৃত্তের কেন্দ্র একই কিন্তু ব্যাসার্ধ বিভিন্ন, তাহাদিগকে **এককেন্দ্রীয় (Concentric)** বৃত্ত বলে।

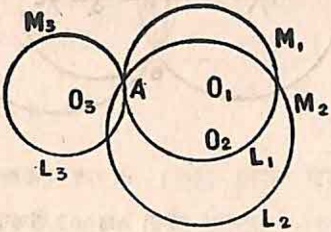


বৃত্তাঙ্কন

একটি নির্দিষ্ট বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইলে উহার কেন্দ্রের অবস্থান ও ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য জানা থাকা প্রয়োজন। নির্দিষ্ট বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া ও নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের সমান ব্যাসার্ধ লইয়া কম্পাসের সাহায্যে বৃত্তটি অঙ্কন করা যাইবে।

একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে।

[To draw a circle passing through a given point.]



মনে কর A একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। যে কোন স্থানে অপর কোন বিন্দু O_1 লও। এখন O_1-কে কেন্দ্র করিয়া, O_1A ব্যাসার্ধ লইয়া, A-বিন্দুগামী AL_1M_1 বৃত্ত অঙ্কন করা যাইবে।

বৃত্তটি আরও বৃহত্তর করিতে হইলে কেন্দ্রবিন্দুর অবস্থান A হইতে আরও দূরবর্তী স্থানে নির্দিষ্ট করিতে হইবে। যেমন ধর O_2 বিন্দু ; উহাকে কেন্দ্র করিয়া O_2A ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত AL_2M_2, A বিন্দু দিয়া যাইবে। কিন্তু উহা পূর্ববর্তী বৃত্ত হইতে আকারে বড় হইবে।

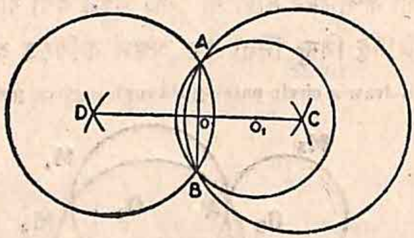
পুনরায় কেন্দ্রবিন্দুর অবস্থান A-এর যে-কোন পার্শ্বে নির্দিষ্ট করিয়া বৃত্তটি যে কোন দিকে অঙ্কন করা যাইবে। AL_3M_3 বৃত্তটি দেখ।

কেন্দ্রবিন্দু যে-কোন স্থানে ও দূরত্বে লওয়া যায় বলিয়া **একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া অসংখ্য বৃত্ত অঙ্কন করা যায় ও ইহাদের অবস্থান ও আকৃতি ইচ্ছামত করা যাইতে পারে।**

সুতরাং দেখা গেল—**একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া অসংখ্য বৃত্ত অঙ্কন করা যায় ; এবং ইহাদের কেন্দ্র ইচ্ছামত যে-কোন বিন্দু লওয়া যাইতে পারে।**

দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে।

[To draw a circle passing through two given points.]



মনে কর A, B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু। A-কে কেন্দ্র করিয়া AB-এর অর্ধ অপেক্ষা বৃহত্তর যে-কোন ব্যাসার্ধ লইয়া AB-এর উভয় পার্শ্বে দুইটি চাপ অঙ্কন কর। পুনরায় B-কে কেন্দ্র করিয়া একই ব্যাসার্ধ লইয়া অনুরূপ দুইটি চাপ অঙ্কন কর ; মনে কর, এই চাপদ্বয় পূর্বচাপদ্বয়কে C ও D বিন্দুতে ছেদ করিল। CD যুক্ত কর।

তাহা হইলে AB ও CD-এর ছেদবিন্দু O, AB-এর মধ্যবিন্দু ; এবং CD AB-এর **লম্ব-দ্বিখণ্ডক**।

এখন, CD (বা উহার বর্ধিতাংশ)-এর উপর যে-কোন বিন্দু O_1 লও এবং O_1-কে কেন্দ্র করিয়া O_1A ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন কর। এই বৃত্ত নির্দিষ্ট A ও B বিন্দু দিয়া যাইবে।

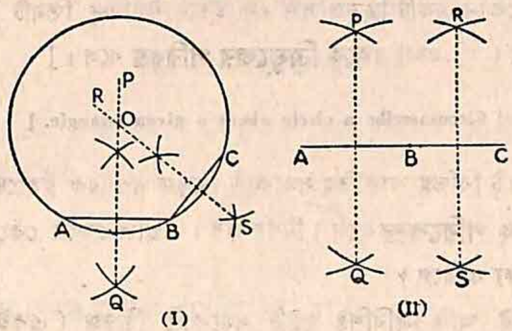
অনুরূপ পদ্ধতিতে CD-এর উপর অন্য যে-কোন বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া ঐ বিন্দু হইতে নির্দিষ্ট বিন্দুদ্বয়ের যে-কোনটির দূরত্বের সমান ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কন করিলে বৃত্তটি নির্দিষ্ট A ও B বিন্দু দিয়া যাইবে।

CD-এর উপর অসংখ্য বিন্দুকে কেন্দ্র লওয়া যায়, সুতরাং দেখা গেল—

দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া অসংখ্য বৃত্ত অঙ্কন করা যায় ; ইহাদের সকলের কেন্দ্র নির্দিষ্ট বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার লম্ব-দ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত হইবে।

তিনটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে।

[To draw a circle passing through three given points.]



মনে কর, A, B, C তিনটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

অঙ্কন ঃ AB, BC যুক্ত কর। AB-এর লম্ব-দ্বিখণ্ডক PQ এবং BC-এর লম্ব-দ্বিখণ্ডক RS অঙ্কন কর। মনে কর, এই লম্ব-দ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করিল [চিত্র (I)]। O-কে কেন্দ্র করিয়া OA ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন কর। এই বৃত্ত নির্দিষ্ট A, B, C বিন্দুত্রয় দিয়া যাইবে।

এক সরলরেখায় অবস্থিত নহে এমন তিনটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া একটি ও মাত্র একটি বৃত্তই অঙ্কন করা যাইবে। কারণ, AB, AC-এর লম্ব-দ্বিখণ্ডকদ্বয় একটি ও মাত্র একটি বিন্দুতেই ছেদ করিবে এবং সেইজন্য A, B, C হইতে সমদূরবর্তী বিন্দু একটি ও মাত্র একটিই পাওয়া যাইবে।

A, B, C একই সরলরেখায় অবস্থিত হইলে [চিত্র (II)] AB ও BC-এর লম্ব-দ্বিখণ্ডকদ্বয় যথাক্রমে PQ ও RS উভয়েই একই সরলরেখা ABC-এর উপর লম্ব হওয়ায় পরস্পর সমান্তরাল হইবে, অর্থাৎ উভয় দিকে যথেচ্ছ বর্ধিত করিলেও কোন বিন্দুতে ছেদ করিবে না। সুতরাং এরূপ কোন বিন্দু পাওয়া যাইবে না যাহা A, B ও C বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী। এক্ষেত্রে বৃত্তাঙ্কন সম্ভব নয়। সুতরাং দেখা গেল—

তিনটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া একটি মাত্র বৃত্ত অঙ্কন করা যায়—কিন্তু বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত হইলে এই অঙ্কন সম্ভব নয়।

অনুশীলনী

1. যে-কোন একটি ত্রিভুজ লও এবং ইহার শীর্ষবিন্দু তিনটি দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন কর। [এরূপ বৃত্তকে **ত্রিভুজের পরিবৃত্ত** বলে।]

[Circumscribe a circle about a given triangle.]

2. তিনটি বিভিন্ন আকৃতির সমকোণী ত্রিভুজ লও এবং ইহাদের পরিবৃত্তের কেন্দ্র (ইহাকে **পরিকেন্দ্র** বলে) নির্ণয় কর। প্রতি ক্ষেত্রে কেন্দ্রের অবস্থান সম্বন্ধে কি লক্ষ্য করিলে ?

3. একই অতিভুজবিশিষ্ট দুইটি সমকোণী ত্রিভুজ (একই পার্শ্বে বা বিপরীত পার্শ্বে) লও এবং ইহাদের পরিবৃত্ত অঙ্কন কর। একই বৃত্ত পাওয়া গেল কি ?

4. A একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। একই ব্যাসার্ধবিশিষ্ট যে-সকল বৃত্ত A বিন্দু দিয়া যাইবে তাহাদের কেন্দ্রগুলির অবস্থান সম্বন্ধে কি বলিতে পার ?

5. দুইটি বৃত্ত পরস্পর A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। AB-এর লম্ব-দ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সহিত বৃত্ত দুইটির কেন্দ্রবিন্দুর সম্বন্ধ কি ?

6. AB, CD ও EF তিনটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। এরূপ দুইটি বৃত্ত অঙ্কন কর যাহাদের সাধারণ জ্যা AB-এর সমান এবং যাহাদের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে CD ও EF-এর সমান হইবে। কোন্ ক্ষেত্রে অঙ্কন সম্ভব নয় ?

যদি AB = 6 সেঃ মিঃ, CD = 5 সেঃ মিঃ ও EF = 4 সেঃ মিঃ হয় তাহা হইলে বৃত্ত দুইটির কেন্দ্রের মধ্যে দূরত্ব কত মাপিয়া বল। কয়টি উত্তর পাইলে ?

7. A ও B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং CD একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যাহা A ও B দিয়া যাইবে এবং যাহার কেন্দ্র CD-এর কোন বিন্দু হইবে। CD-এর সকল অবস্থানেই অঙ্কন সম্ভব কি ?

8. কোন বৃত্তের পরিধি নির্দিষ্ট আছে। কেন্দ্র নির্ণয় কর।

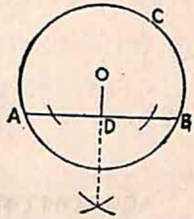
[Given the circumference of a circle find its centre.]

বৃত্তসম্বন্ধীয় কয়েকটি তথ্যের পরীক্ষামূলক আলোচনা

বৃত্তের জ্যা

জ্যা-এর লম্ব-দ্বিখণ্ডক

(*i*) বৃত্তের কেন্দ্র হইতে যে-কোন জ্যা-এর উপর অঙ্কিত লম্ব জ্যা-টিকে দ্বিখণ্ডিত করে।

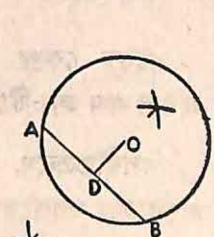


ACB বৃত্তের কেন্দ্র O এবং AB উহার যে-কোন একটি জ্যা।

O হইতে AB-এর উপর OD লম্ব টান।

এখন মাপিয়া দেখ, AD = DB হইবে, অথবা AB-এর মধ্যবিন্দু নির্ণয় করিলে দেখিবে D এই মধ্যবিন্দু।

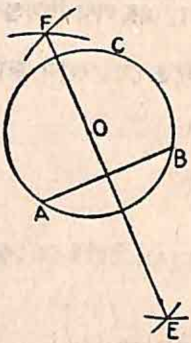
(*ii*) বৃত্তের যে-কোন জ্যা-এর মধ্যবিন্দু এবং কেন্দ্রের সংযোজক সরলরেখা জ্যা-টির উপর লম্ব।



বৃত্তের কেন্দ্র O এবং AB উহার যে-কোন একটি জ্যা। AB-এর মধ্যবিন্দু D নির্ণয় কর। OD যুক্ত কর।

এখন মাপিয়া দেখ, $\angle ADO = \angle BDO = 90^\circ$ হইবে ; অর্থাৎ, DO, AB-এর উপর লম্ব।

(*iii*) বৃত্তের যে-কোন জ্যা-এর লম্ব-দ্বিখণ্ডক কেন্দ্রগামী।



ACB বৃত্তের কেন্দ্র O

AB এই বৃত্তের যে-কোন একটি জ্যা।

AB-এর লম্ব-দ্বিখণ্ডক অঙ্কন কর।

লক্ষ্য কর, এই দ্বিখণ্ডক রেখা কেন্দ্রবিন্দু O দিয়া যাইবে।

[বিভিন্ন বৃত্তের বিভিন্ন জ্যা লইয়া এই তথ্যসমূহ সমর্থিত হয় কিনা পরীক্ষা করিয়া দেখ।]

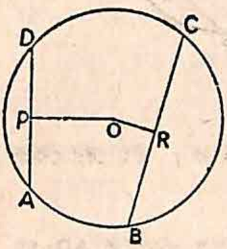
দেখা গেল—

বৃত্তের কেন্দ্র হইতে যে-কোন জ্যা-এর (ব্যাস ভিন্ন) উপর অঙ্কিত লম্ব জ্যা-টিকে দ্বিখণ্ডিত করে।

বিপরীতক্রমে, বৃত্তের যে-কোন জ্যা-এর মধ্যবিন্দু ও কেন্দ্রের সংযোজক সরলরেখা জ্যা-টির উপর লম্ব।

দুইটি জ্যা-এর সমতা বিচার

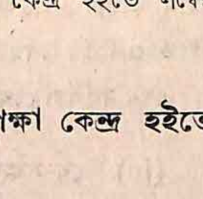
(*i*) কোন বৃত্তের দুইটি জ্যা-এর মধ্যে বৃহত্তরটি ক্ষুদ্রতরটি অপেক্ষা কেন্দ্র হইতে নিকটতর।



ABCD একটি বৃত্ত, O উহার কেন্দ্র। যে-কোন দুইটি জ্যা AD ও BC লও এবং মাপিয়া কোন্‌টি বড় নির্ণয় কর। মনে কর, BC জ্যা AD অপেক্ষা বড়। এখন O হইতে AD ও BC-এর উপর যথাক্রমে OP এবং OR লম্ব টান। মাপিয়া দেখ—OP, OR অপেক্ষা বড় হইয়াছে। অর্থাৎ, BC>AD হইলে OR<OP হইবে। বিভিন্ন জ্যা লইয়া উহাদের উপর কেন্দ্র হইতে লম্বের দৈর্ঘ্যের তুলনা করিলে দেখিবে—

দুইটি জ্যা-এর মধ্যে বৃহত্তরটি ক্ষুদ্রতরটি অপেক্ষা কেন্দ্র হইতে নিকটতর।

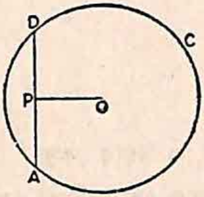
(*ii*) একই বৃত্তে সমান সমান জ্যা-সমূহ কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী।

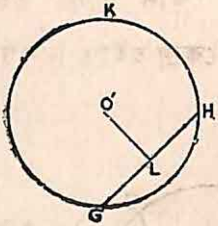


ABCD বৃত্তের কেন্দ্র O। দুইটি জ্যা AD ও BC লও, যেন AD=BC হয়। কেন্দ্র O হইতে OP ও OQ যথাক্রমে AD ও BC-এর উপর লম্ব টান।

এখন, মাপিয়া দেখ, OP=OQ হইবে, অর্থাৎ কেন্দ্র হইতে জ্যা দুইটির দূরত্ব সমান।

(*iii*) **সমান সমান বৃত্তে সমান সমান জ্যা-সমূহ কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী।**



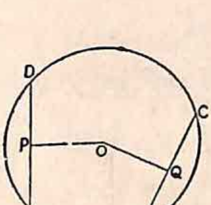


একই ব্যাসার্ধবিশিষ্ট দুইটি বৃত্ত ADC ও GKH আঁক। ইহাদের কেন্দ্র যথাক্রমে O এবং O'।

ADC বৃত্তে যে-কোন একটি জ্যা AD লও এবং অপর বৃত্তটিতে AD-এর সমান করিয়া একটি জ্যা GH লও। O হইতে AD-এর উপর লম্ব OP এবং O' হইতে GH-এর উপর লম্ব O'L অঙ্কন কর।

এখন মাপিয়া দেখ, O'L = OP হইবে।

(*iv*) **যে-সকল জ্যা বৃত্তের কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী, তাহারা পরস্পর সমান।**

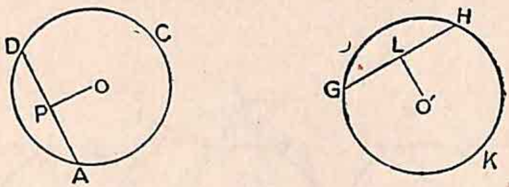


ABCD বৃত্তের কেন্দ্র O ; বৃত্তের মধ্যে দুইটি বিন্দু P ও Q লও, যেন OP = OQ হয়।

OP এবং OQ-এর উপর P ও Q বিন্দুতে যথাক্রমে APD ও BQC দুইটি লম্ব অঙ্কন কর।

এখন পরীক্ষা করিয়া দেখ, জ্যা AD = জ্যা BC হইবে।

(v) সমান সমান বৃত্তে কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী জ্যা-সমূহ পরস্পর সমান।



একই ব্যাসার্ধবিশিষ্ট দুইটি বৃত্ত ADC ও GHK আঁক; ইহাদের কেন্দ্র যথাক্রমে O এবং O'।

ADC বৃত্তে একটি বিন্দু P এবং GHK বৃত্তে একটি বিন্দু L লও, যেন O'L=OP হয়। OP ও O'L-এর উপর P ও L বিন্দুতে যথাক্রমে APD ও GLH দুইটি লম্ব অঙ্কন কর। এখন, পরীক্ষা করিয়া দেখ, জ্যা AD=জ্যা GH হইবে।

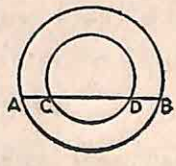
[বিভিন্ন বৃত্তে বিভিন্ন জ্যা লইয়া এই সত্য পরীক্ষা করিয়া দেখ।]

দেখা যাইবে, **একই (বা সমান সমান) বৃত্তে সমান সমান জ্যা-সমূহ কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী।**

বিপরীতক্রমে, একই (বা সমান সমান) বৃত্তে কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী জ্যা-সমূহ পরস্পর সমান।

অনুশীলনী

1. 6 সেঃ মিঃ ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক এবং উহার ভিতরে 9 সেঃ মিঃ দীর্ঘ দুইটি জ্যা অঙ্কন কর। মাপিয়া দেখাও উহারা কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী।

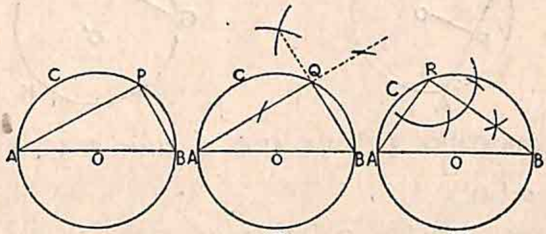


2. পার্শ্বস্থ চিত্রে একটি সরলরেখা দুইটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তকে যথাক্রমে A, B ও C, D-তে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর AC=BD।

3. কোন বৃত্তের কতকগুলি সমান জ্যা অঙ্কিত করিয়া উহাদের মধ্যবিন্দু-সমূহ নির্ণয় কর। এই মধ্যবিন্দুগুলির অবস্থান সম্বন্ধে কি বলিতে পার?

বৃত্তাংশস্থিত কোণ

(*i*) অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ।



(I) (II) (III)

ACB একটি অর্ধবৃত্ত ; AB বৃত্তের ব্যাস এবং O কেন্দ্র।

(1) [চিত্র (I)] পরিধির উপর যে-কোন বিন্দু P লও এবং AP, BP যুক্ত কর। এখন কোণচক্রের সাহায্যে মাপিয়া দেখ, $\angle APB = 90^\circ$ হইবে।

(2) [চিত্র (II)] পরিধির উপর একটি বিন্দু Q লও এবং AQ যুক্ত কর। B হইতে AQ-এর উপর লম্ব অঙ্কন কর। লক্ষ্য কর, এই লম্ব AQ-এর সহিত Q বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে ;

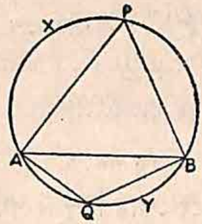
সুতরাং $\angle AQB = 90^\circ$।

(3) [চিত্র (III)] পরিধির উপর একটি বিন্দু R লও এবং AR-এর উপর R বিন্দুতে একটি লম্ব অঙ্কন কর। লক্ষ্য কর এই লম্ব B বিন্দু দিয়া যাইবে ;

সুতরাং $\angle ARB = 90^\circ$

অর্থাৎ একটি অর্ধবৃত্তের পরিধির উপর যে-কোন বিন্দু লইয়া ঐ বিন্দু ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের সহিত যুক্ত করিলে পরিধিতে যে কোণ উৎপন্ন হয় উহা একটি সমকোণ।

(*ii*) অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর বৃত্তাংশস্থিত কোণ সূক্ষ্মকোণ এবং অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বৃত্তাংশস্থিত কোণ স্থূলকোণ।



একটি বৃত্তে ব্যাস নহে এরূপ একটি জ্যা AB লও। এই জ্যা সমগ্র পরিধিকে দুই অসমান অংশে—AXB অধিচাপ ও AYB উপচাপে—বিভক্ত করিয়াছে।

(ক) AXB বৃত্তাংশে পরিধির উপর যে-কোন বিন্দু P লইয়া PA ও PB যুক্ত কর এবং কোণচক্রদ্বারা মাপিয়া দেখ—

$\angle$APB এক সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইয়াছে।

(খ) AYB বৃত্তাংশে পরিধির উপর যে-কোন বিন্দু Q লইয়া QA ও QB যুক্ত কর এবং মাপিয়া দেখ—

$\angle$AQB এক সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইয়াছে।

[বিভিন্ন বৃত্তে বিভিন্ন ব্যাস ও জ্যা অঙ্কিত করিয়া (*i*) ও (*ii*)-এর আলোচ্য তথ্যগুলি সমর্থিত হয় কি না পরীক্ষা করিয়া দেখ।]

দেখা গেল,—**অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ, অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর বৃত্তাংশস্থিত কোণ সূক্ষ্মকোণ এবং অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বৃত্তাংশস্থিত কোণ স্থূলকোণ।**

অনুশীলনী

1. প্রদত্ত সংকেত হইতে প্রমাণ সম্পূর্ণ কর যে অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ।
APB অর্ধবৃত্তে পরিধির উপর P যে-কোন বিন্দু ; O বৃত্তের কেন্দ্র।

(i) OP যুক্ত কর।

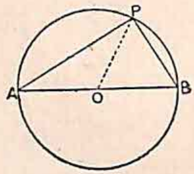
OA=OP, ∴ ∠OPA=∠……

আবার OB=OP, ∴ ∠……=∠OBP

সুতরাং ∠APB=∠……+∠……

কিন্তু ত্রিভুজের কোণ-সমষ্টি=………

∴ ∠APB=½∠……=এক সমকোণ।



(ii) PO যুক্ত কর এবং যে-কোন বিন্দু R পর্যন্ত বর্ধিত কর।

বহিঃ ∠AOR=∠OPA+∠…

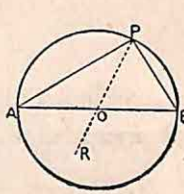
কিন্তু ∠OPA=∠OAP, কারণ…

∴ ∠AOR=2∠OPA,

অর্থাৎ ∠OPA=½∠…

তদ্রূপ, ∠OPB=½∠…

সুতরাং ∠APB=½∠…

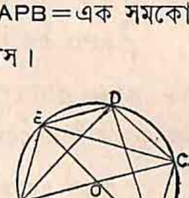


কিন্তু ∠…একটি সরলকোণ=… ∴ ∠APB=এক সমকোণ।

2. পার্শ্বস্থ চিত্রে বৃত্তের কেন্দ্র O ; AC, BE ব্যাস।

(i) ∠ABC-এর সমান কোণগুলি নির্দেশ কর। কয়টি কোণ পাইলে ?

(ii) প্রমাণ কর,
∠DAB+∠DCB=দুই সমকোণ।



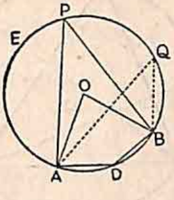
(iii) ∠BCA ও ∠CDE-এর মধ্যে কোন্‌টি সূক্ষ্মকোণ এবং কোন্‌টি স্থূলকোণ এবং কেন ?

(iv) ∠ABE=30° হইলে, ∠AEB=কত ?

(v) ∠ACB=60° হইলে, ∠ABE=কত ?

কেন্দ্রস্থিত ও পরিধিস্থিত কোণ

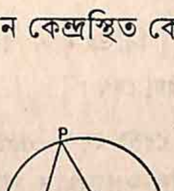
সংজ্ঞা ঃ পার্শ্বস্থ চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং ADB উহার একটি চাপ। OA, OB যুক্ত করিলে বৃত্তের কেন্দ্রে যে AOB কোণটি উৎপন্ন হইল, ঐ কোণটি ADB **চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থিত কোণ।** ADB চাপের অনুবন্ধী চাপ AEB-এর উপর যে-কোন বিন্দু P লইয়া PA ও PB যুক্ত করিলে পরিধিতে যে APB কোণ উৎপন্ন হইল তাহাকে ADB **চাপের উপর দণ্ডায়মান পরিধিস্থিত কোণ বলা হয়।** AEB চাপের উপর অন্য একটি বিন্দু Q-তে উৎপন্ন ∠AQB কোণটিও ADB চাপের উপর দণ্ডায়মান পরিধিস্থিত কোণ। **একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থিত কোণ একটিমাত্র হইবে, পরিধিস্থিত কোণ অসংখ্য হইতে পারে।**



DA ও DB যুক্ত করিলে ADB কোণটি AEB চাপের উপর দণ্ডায়মান পরিধিস্থিত কোণ এবং প্রবৃদ্ধ ∠AOB ঐ চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থিত কোণ।

(*i*) কোন বৃত্তে একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থিত কোণ পরিধিস্থিত কোণের দ্বিগুণ।

APB বৃত্তের কেন্দ্র O, এবং ADB একটি চাপ। OA, OB যুক্ত কর। ADB চাপের অনুবন্ধী চাপের উপর যে-কোন অবস্থানে একটি বিন্দু P লও এবং PA, PB যুক্ত কর।

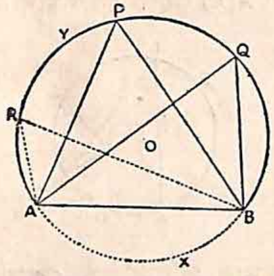


কোণচক্রদ্বারা AOB ও APB কোণদ্বয় মাপিয়া উহাদের পরিমাণ নির্ণয় কর। এখন পরীক্ষা করিয়া দেখ ∠AOB=2∠APB হইবে। [বিভিন্ন বৃত্তে বিভিন্ন অবস্থানে পরিধিস্থিত কোণ অঙ্কন করিয়া এই তথ্য সমর্থিত হয় কিনা পরীক্ষা করিয়া দেখ।]

দেখা গেল, **একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থিত কোণ পরিধিস্থিত কোণের দ্বিগুণ।**

6

(*ii*) একই বৃত্তাংশস্থিত কোণসমূহ পরস্পর সমান।



AXBY একটি বৃত্ত। উহার একটি জ্যা AB বৃত্তটিকে AYB এবং AXB এই দুই বৃত্তাংশে বিভক্ত করিয়াছে।

AYB এই বৃত্তাংশে চাপের উপর যে-কোন দুইটি বিন্দু P ও Q লও।

PA, PB ও QA, QB যুক্ত কর। এখন কোণচক্রের সাহায্যে মাপিয়া দেখ—

$\angle APB = \angle AQB$ হইবে।

এই বৃত্তাংশে অপর যে-কোন বিন্দু R লইয়া $\angle ARB$-এর পরিমাণ নির্ণয় করিলে দেখা যাইবে এই কোণও $\angle APB$ বা $\angle AQB$-এর সমান।

লক্ষ্য কর $\angle APB$, $\angle AQB$, $\angle ARB$—ইহারা সকলেই AXB চাপের উপর দণ্ডায়মান পরিধিস্থিত কোণ এবং পরস্পর সমান।

[বিভিন্ন বৃত্তে বিভিন্ন বৃত্তাংশ লইয়া এই তথ্য সমর্থিত হয় কিনা পরীক্ষা করিয়া দেখ।]

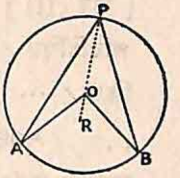
দেখা গেল—**একই বৃত্তাংশস্থিত কোণসমূহ অর্থাৎ একই চাপের উপর দণ্ডায়মান পরিধিস্থিত কোণসকল পরস্পর সমান।**

অনুশীলনী

1. প্রদত্ত সংকেত অবলম্বন করিয়া প্রমাণগুলি সম্পূর্ণ কর।

(*i*) O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB একটি চাপ। AB চাপের উপর AOB কেন্দ্রস্থিত এবং APB পরিধিস্থিত কোণ।

PO যুক্ত কর ও যে-কোন বিন্দু R পর্যন্ত বর্ধিত কর।



বহিঃ ∠AOR = ∠OPA + ∠···

কিন্তু ∠······ = ∠OAP

∴ ∠AOR = 2∠······

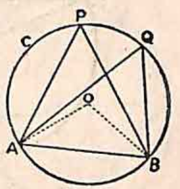
তদ্রূপ, ∠BOR = 2∠······

সুতরাং ∠AOR + ∠BOR = 2∠······ + 2∠······

অর্থাৎ ∠AOB = 2∠APB

∴ একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থিত কোণ পরিধিস্থিত কোণের দ্বিগুণ।

(*ii*) ACB একটি বৃত্তাংশ এবং O বৃত্তের কেন্দ্র; ∠APB ও ∠AQB এই বৃত্তাংশে যে-কোন দুইটি কোণ।



OA, OB যুক্ত কর।

কেন্দ্রস্থিত ∠··· = 2 × পরিধিস্থিত ∠APB

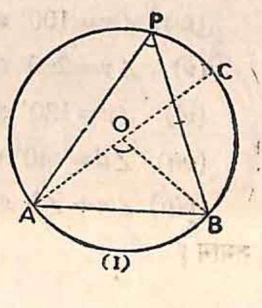
তদ্রূপ ∠AOB = 2 ∠······

সুতরাং ∠APB ও ∠AQB উভয়েই ∠···এর অর্ধেক

∴ ∠APB = ∠AQB

∴ একই বৃত্তাংশস্থিত কোণগুলি পরস্পর সমান।

(*iii*) [চিত্র (I)] APB অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর বৃত্তাংশ। O বৃত্তের কেন্দ্র, AC ব্যাস।



(I)

পরিধিস্থিত ∠APB = ½ × কেন্দ্রস্থিত ∠······

কিন্তু ∠AOB < সরলকোণ ∠AOC

অর্থাৎ ∠AOB < ······

∴ ∠APB < এক সমকোণ।

সুতরাং অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর বৃত্তাংশস্থিত কোণ সূক্ষ্মকোণ।

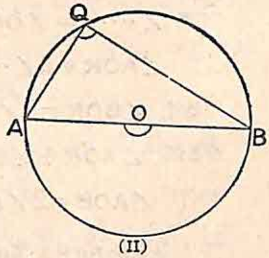
[চিত্র (II)] AQB একটি অর্ধবৃত্ত ; O কেন্দ্র, AB ব্যাস।

পরিধিস্থিত ∠AQB = $\frac{1}{2}$ × কেন্দ্রস্থিত ∠···

কিন্তু ∠······একটি সরলকোণ = ·····

∴ ∠AQB = এক সমকোণ।

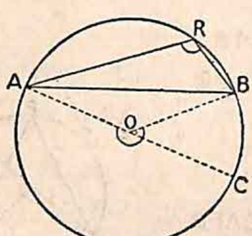
সুতরাং অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ।



(II)

[চিত্র (III)] ARB অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বৃত্তাংশ, O কেন্দ্র, AC ব্যাস।

পরিধিস্থিত ∠ARB = $\frac{1}{2}$ × কেন্দ্রস্থিত প্রবৃদ্ধ ∠···



(III)

কিন্তু ∠·····> ∠AOC

∠AOC একটি সরলকোণ = ···

∴ কেন্দ্রস্থিত ∠AOB>······

∴ ∠ARB> এক সমকোণ।

সুতরাং অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বৃত্তাংশস্থিত কোণ স্থূলকোণ।

2. পার্শ্বস্থ চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং A, P, Q, R, B, S পরিধির উপরিস্থিত বিন্দু।

(*i*) ∠AQB-এর সমান কোণগুলি নির্দেশ কর ; কয়টি কোণ পাইলে ?

(*ii*) $\angle b = 45^\circ$ হইলে, $\angle d$ কত ?

(*iii*) $\angle d = 50^\circ$ হইলে, $\angle x$ কত ?

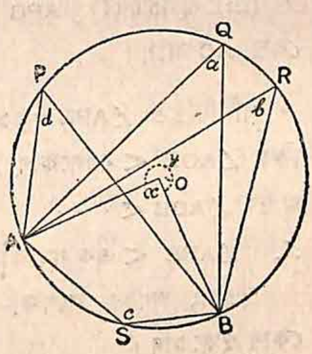
(*iv*) $\angle x = 100^\circ$ হইলে, $\angle a$ কত ?

(*v*) $\angle y = 260^\circ$ হইলে, $\angle c$ কত ?

(*vi*) $\angle c = 130^\circ$ হইলে, $\angle x$ কত ?

(*vii*) $\angle d = 40^\circ$ হইলে, $\angle c$ কত ?

(*viii*) $\angle a + \angle b$ একত্রে কোন্ কোণটির সমান ?

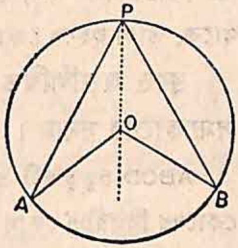


(ix) ∠QAR-এর সমান একটি কোণ নির্দেশ কর।

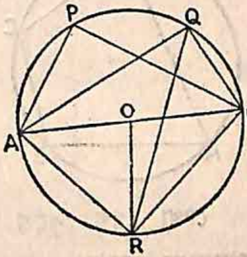
(x) ∠PBQ-এর দ্বিগুণ কোণ কিরূপে পাইবে ?

3. পার্শ্বস্থ চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র।

প্রমাণ কর $\angle AOB = 2(\angle OAP + \angle OBP)$



4. পার্শ্বস্থ চিত্রে বৃত্তের কেন্দ্র O, AB ব্যাস।



(i) ∠APB-এর সমান কোণগুলি নির্দেশ কর ; উহাদের প্রত্যেকের পরিমাণ কত এবং কেন ?

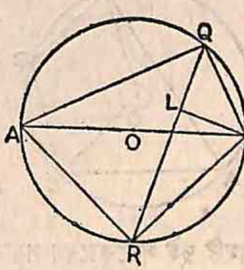
(ii) $\angle AOR = 84^\circ$ হইলে, ∠BQR কত ?

(iii) $\angle BOR = 96^\circ$ হইলে, ∠AQR কত ?

(iv) $\angle QBP = 30^\circ$ এবং $\angle QAB = 25^\circ$ হইলে, ∠PBA কত ?

(v) $\angle BRQ = 25^\circ$ এবং $\angle QBP = 30^\circ$ হইলে, ∠PBA কত ?

5. পার্শ্বস্থ চিত্রে বৃত্তের কেন্দ্র O, এবং AB ব্যাস। BL রেখা, QR জ্যা-এর উপর লম্ব। প্রমাণ কর—



(i) $\angle QBL = \angle ABR$

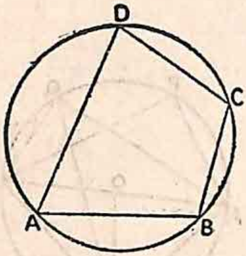
(ii) $\angle QRA = \angle RBL$

বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ

সংজ্ঞা : বৃত্তের মধ্যে একটি ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ বা বহুভুজ ক্ষেত্র যদি এরূপভাবে অঙ্কন করা যায় যে ইহার শীর্ষবিন্দুগুলি বৃত্তের পরিধির উপর অবস্থিত থাকে, তাহা হইলে ক্ষেত্রটিকে **বৃত্তে অন্তর্লিখিত** (inscribed) বলা হয়।

বৃত্তে অন্তর্লিখিত কোন চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

ABCD চতুর্ভুজটি একটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত হইয়াছে। এই চতুর্ভুজে BAD কোণের বিপরীত কোণ BCD এবং ABC কোণের বিপরীত কোণ ADC।



কোণচক্রের সাহায্যে মাপিয়া $\angle BAD$ ও $\angle BCD$-এর পরিমাণ নির্ণয় কর।

$\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$ অর্থাৎ দুই সমকোণ, এবং $\angle ABC + \angle ADC =$ দুই সমকোণ হইবে।

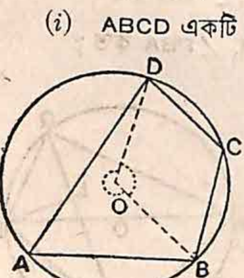
[বিভিন্ন বৃত্তে বিভিন্ন চতুর্ভুজ লইয়া এই তথ্য সমর্থিত হয় কি না দেখ।]

দেখা গেল, **বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সম্পূরক।**

অনুশীলনী

1. প্রদত্ত সংকেত অবলম্বন করিয়া প্রমাণ সম্পূর্ণ কর।

(*i*) ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ ; O বৃত্তের কেন্দ্র। OD, OB যুক্ত কর।



পরিধিস্থিত $\angle BAD = \frac{1}{2} \angle \cdots$

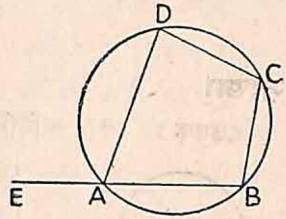
পরিধিস্থিত $\angle BCD = \frac{1}{2} \angle \cdots$(প্রবৃদ্ধ)

$\therefore \angle BAD + \angle BCD = \cdots\cdots$

কিন্তু $\angle BOD +$ প্রবৃদ্ধ $\angle BOD = \cdots\cdots$

$\therefore \angle BAD + \angle BCD =$ দুই সমকোণ।

অর্থাৎ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।



(*ii*) ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ; ইহার BA বাহু E পর্যন্ত বর্ধিত হইয়াছে।

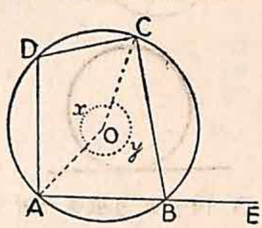
∠BAD + ∠BCD = ……

∠BAD + ∠DAE = ……

∴ ∠BAD + ∠BCD = ∠BAD + ∠DAE

∴ ∠BCD = ∠DAE

স্থতরাং কোন বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের একটি বাহু বর্ধিত হইলে বহিঃকোণটি বিপরীত অন্তঃকোণের সমান হইবে।



5. ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ; O কেন্দ্র। AB বাহুটি E পর্যন্ত বর্ধিত হইয়াছে এবং AO, CO যুক্ত করা হইয়াছে। কেন্দ্রস্থিত $\angle x$ ও $\angle y$ কোণদ্বয়ের মধ্যে $\angle y$ প্রবৃদ্ধ।

(*i*) $\angle x = 150^\circ$ হইলে, ∠ABC = কত ?

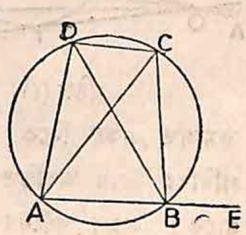
(*ii*) $\angle y = 210^\circ$ হইলে, ∠ADC কত ?

(*iii*) $\angle ADC = 100^\circ$ হইলে, ∠ABC = কত, ∠CBE = কত ?

(*iv*) $\angle CBE = 110^\circ$ হইলে, ∠ADC = কত, $\angle y$ = কত ?

(*v*) $\angle y = 200^\circ$ হইলে, ∠CBE = কত ?

(*vi*) $\angle x = 140^\circ$ হইলে, ∠ADC = কত ?



3. ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। ইহার AB বাহু E পর্যন্ত বর্ধিত হইয়াছে।

(*i*) $\angle BDC = 55^\circ$ এবং $\angle BCA = 40^\circ$ হইলে, ∠CBE = কত ?

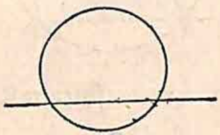
(*ii*) $\angle ABD = 58^\circ$ এবং $\angle CBE = 95^\circ$ হইলে, ADC ত্রিভুজের কোণগুলির মান নির্ণয় কর।

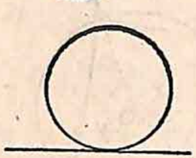
(*iii*) $\angle ACB = 58^\circ$, $\angle BAC = 55^\circ$, $\angle CBE = 90^\circ$ হইলে, চিত্রে যতগুলি কোণ উৎপন্ন হইয়াছে তাহাদের প্রত্যেকের মান নির্ণয় কর।

বৃত্তের স্পর্শক

সংজ্ঞা

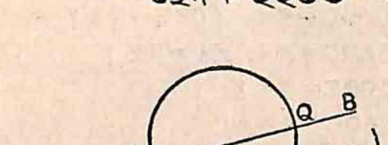
ছেদক ঃ কোন অনির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের সরলরেখা বৃত্তের পরিধিকে দুই বিন্দুতে ছেদ করিলে তাহাকে **ছেদক** (**Secant**) বলে। [বৃত্তের যে-কোন জ্যা-কে বর্ধিত করিলে উহাও একটি ছেদকে পরিণত হয়।]





স্পর্শক ঃ যে সরলরেখা বৃত্তের পরিধিকে একটিমাত্র বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং বর্ধিত হইয়াও অন্য কোন বিন্দুতে পরিধিকে স্পর্শ বা ছেদ করে না; তাহাকে **স্পর্শক** (**Tangent**) বলে। রেখাটি যে বিন্দুতে বৃত্তকে স্পর্শ করে তাহাকে **স্পর্শবিন্দু** (**Point of Contact**) বলে।

ছেদক হইতে স্পর্শকের উৎপত্তি

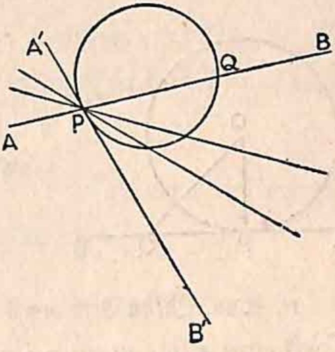


চিত্র (*i*)

মনে কর বৃত্তের একটি ছেদক AB বৃত্তটিকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং O বৃত্তের বাহিরে AB-এর উপরিস্থিত একটি বিন্দু [চিত্র (*i*)]। এখন O বিন্দুটিকে স্থির রাখিয়া যদি রেখাটিকে ক্রমাগত একই দিকে ঘুরানো যায় তাহা হইলে P ও Q নিয়ত বৃত্তের পরিধির উপর অবস্থিত থাকিয়া ক্রমশঃ পরস্পরের দিকে অগ্রসর হইতে থাকে। এরূপ ঘূর্ণনের ফলে AB-এর এরূপ একটি অবস্থান পাওয়া যায় যেখানে P ও Q উভয়েই পরিধির একটি বিন্দুতে মিলিত হয়। এই অবস্থানে AB রেখাটি বৃত্তকে ছেদ না করিয়া কেবলমাত্র একটি বিন্দুতে স্পর্শ করে বলা যায়। ইহা এরূপ একটি অবস্থান যে ঘূর্ণন-ক্রিয়া ইহার পর চলিতে দিলে রেখাটি

বৃত্তকে ছাড়িয়া যাইবে। এরূপ অবস্থানে বৃত্তদ্বারা ছিন্ন AB-এর অংশ একটি বিন্দুমাত্রে পরিণত হয়। মনে কর A'B', AB-এর সেই চরম অবস্থান এবং P ও Q উভয়েই পরিধির T বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। এই A'B' রেখাই বৃত্তের স্পর্শক এবং T স্পর্শবিন্দু।

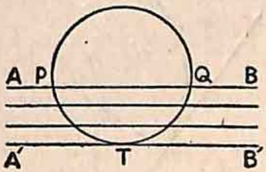
যে-কোন একটি ছেদবিন্দু P-কে স্থির রাখিয়া যদি AB ছেদকটিকে ঘুরানো যায় [চিত্র (*ii*)] তাহা হইলেও চরম অবস্থানে ছেদকটি স্পর্শকে পরিণত হইবে, কিন্তু এখানে Q বিন্দুটি ক্রমশঃ P-এর দিকে অগ্রসর হইয়া অবশেষে P-এর সহিত মিলিত হইবে এবং A'B', বৃত্তের P বিন্দুতে স্পর্শক হইবে।



চিত্র (*ii*)

আবার ছেদক রেখা AB যদি ক্রমশঃ একই দিকে এরূপ ভাবে চলিতে থাকে যে ইহার সকল অবস্থানই পরস্পর সমান্তরাল [চিত্র (*iii*)], তাহা হইলেও ছেদবিন্দুদ্বয় P ও Q ক্রমশঃ নিকটবর্তী হইয়া একটিমাত্র বিন্দু T-তে মিলিত হয় এবং এই অবস্থানে A'B' বৃত্তের স্পর্শক ও T স্পর্শবিন্দু হইবে।

সুতরাং বলা যায়, **বৃত্তের যে ছেদক পরিধিতে দুইটি সমাপতিত বিন্দুতে ছেদ করে (অথবা যে ছেদকরেখায় বৃত্তদ্বারা ছিন্ন জ্যা একটি বিন্দু মাত্র) তাহাই বৃত্তের স্পর্শক।**



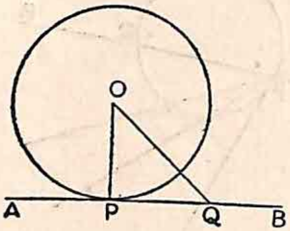
চিত্র (*iii*)

মন্তব্য ঃ স্পষ্টই বুঝা যায়, **স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু ব্যতীত অপর সকল বিন্দুই বৃত্তের বাহিরে থাকিবে।**

স্পর্শক ও স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের সম্বন্ধ

বৃত্তের স্পর্শক ও স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ পরস্পর লম্ব।

মনে কর, O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তের স্পর্শক AB এবং P স্পর্শবিন্দু, তাহা হইলে P ব্যতীত AB রেখার সকল বিন্দুই বৃত্তের বাহিরে অবস্থিত।

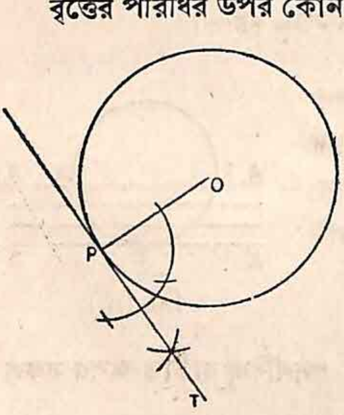


মনে কর, Q, AB-এর উপর অন্য যে-কোন একটি বিন্দু। OP, OQ যুক্ত কর।

P, বৃত্তের পরিধির উপর একটি বিন্দু বলিয়া OP একটি ব্যাসার্ধ। এখন, Q বিন্দুটি বৃত্তের বাহিরে থাকায় OQ ব্যাসার্ধ অপেক্ষা বৃহত্তর, অর্থাৎ OP অপেক্ষা বৃহত্তর। অতএব O হইতে AB-এর উপর যে সকল সরলরেখা টানা যায় তাহাদের মধ্যে OP-ই ক্ষুদ্রতম।

অতএব OP, AB-এর উপর লম্ব।

বৃত্তের পরিধির উপর কোন বিন্দুতে স্পর্শক অঙ্কন পদ্ধতি।



বৃত্তের কেন্দ্র O, এবং P পরিধির উপর যে-কোন একটি বিন্দু। P বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন করিতে হইবে।

OP যুক্ত কর এবং OP-এর উপর P বিন্দুতে PT লম্ব টান।

তাহা হইলে PT, P বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক হইবে।

অনুশীলনী

1. AB একটি সরলরেখা ও বহিঃস্থ একটি বিন্দু O নির্দিষ্ট আছে; O-কেন্দ্রবিশিষ্ট এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যাহা AB-কে কোন বিন্দুতে স্পর্শ করিবে।

2. একটি সরলরেখা AB এবং উহার উপরিস্থিত একটি বিন্দু P নির্দিষ্ট আছে। এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যাহার ব্যাসার্ধ নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের সমান হইবে এবং যাহা AB-কে P বিন্দুতে স্পর্শ করিবে।

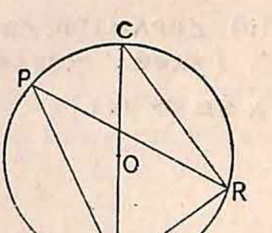
3. একটি সরলরেখা AB এবং উহার উপরিস্থিত একটি বিন্দু P লও। 1·5 সেঃ মিঃ ও 2·5 সেঃ মিঃ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট দুইটি বৃত্ত।

(*i*) AB-এর একই পার্শ্বে,

(*ii*) AB-এর বিপরীত পার্শ্বে অঙ্কন কর,

যাহারা উভয়েই AB-কে P বিন্দুতে স্পর্শ করিবে। উহাদের কেন্দ্রের মধ্যে দূরত্ব কত ?

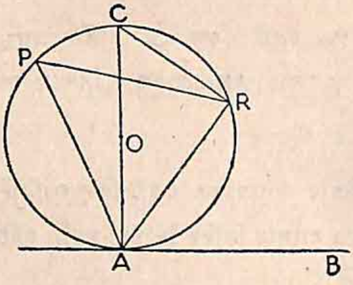
4. O বৃত্তের কেন্দ্র, AC ব্যাস, AB স্পর্শক এবং A স্পর্শবিন্দু, AR স্পর্শবিন্দুগামী একটি জ্যা এবং P, RCA চাপের উপর একটি বিন্দু।



(*i*) $\angle ACR = 37^\circ$ হইলে,
$\angle RAB =$ কত ?

(*ii*) $\angle RAB = 48^\circ$ হইলে,
$\angle ACR =$ কত ?
$\angle APR =$ কত ?

(*iii*) $\angle APR = 50^\circ$ হইলে,
$\angle RAB =$ কত ?



5. O বৃত্তের কেন্দ্র, AC ব্যাস, AB স্পর্শক, A স্পর্শবিন্দু, AR স্পর্শবিন্দুগামী একটি জ্যা এবং P, RCA চাপের উপর যে-কোন বিন্দু। নিম্নলিখিত প্রমাণটি সম্পূর্ণ কর :—

$\angle$BAC = এক সমকোণ, কারণ···

$\angle$ARC = এক সমকোণ, কারণ···

$\therefore$ $\angle$BAR + $\angle$RAC = $\angle$RCA + $\angle$RAC,

কারণ উভয় সমষ্টিই = ···

$\therefore$ $\angle$BAR = $\angle$RCA, কিন্তু $\angle$RCA = $\angle$RPA, কারণ···

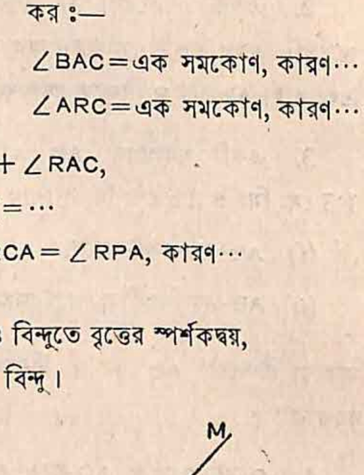
$\therefore$ $\angle$BAR = $\angle$RPA

6. CAL ও CBM যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শকদ্বয়, P, AB-উপচাপের উপর একটি বিন্দু।

(*i*) $\angle$BCA = 48°, $\angle$BPA = কত ?

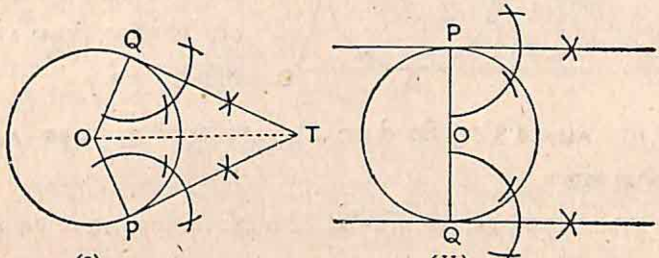
(*ii*) $\angle$BPA = 114°, $\angle$BCA = কত ?

[সংকেত : বৃত্তের কেন্দ্রের সহিত A ও B যুক্ত কর।]



বহিঃস্থ বিন্দু হইতে অঙ্কিত স্পর্শক

কোন বহিঃস্থ বিন্দু হইতে বৃত্তের যে দুইটি স্পর্শক অঙ্কন করা যায় তাহাদের দৈর্ঘ্য সমান এবং তাহারা কেন্দ্রে সমান সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে।



(I) (II)

O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তের পরিধির উপর দুইটি বিন্দু P ও Q লও এবং এই দুই বিন্দুতে বৃত্তের দুইটি স্পর্শক অঙ্কন কর। মনে কর এই স্পর্শক দুইটি T বিন্দুতে মিলিত হইল [চিত্র (I)]। তাহা হইলে TP এবং TQ বহিঃস্থ বিন্দু T হইতে বৃত্তের দুইটি স্পর্শক হইল। OT যুক্ত কর।

এখন পরীক্ষা করিয়া দেখিলে পাইবে,

(*i*) TP = TQ, এবং

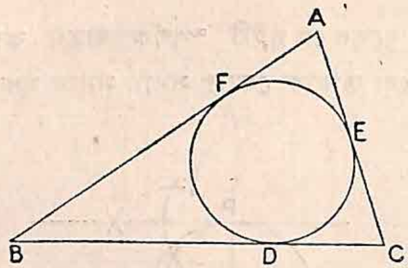
(*ii*) $\angle TOP = \angle TOQ$।

লক্ষ্য করিবে যে P ও Q যদি বৃত্তের কোন ব্যাসের প্রান্ত-বিন্দুতে অবস্থিত হয় [চিত্র (II)], তাহা হইলে স্পর্শক দুইটি পরস্পর সমান্তরাল হওয়ায় কোন বিন্দুতে মিলিত হইবে না।

[বিভিন্ন বৃত্তে বিন্দুদ্বয়ের বিভিন্ন অবস্থান লইয়া এই তথ্যসমূহ সমর্থিত হয় কিনা পরীক্ষা করিয়া দেখ।]

মন্তব্য : স্পর্শকের TP (বা TQ) অংশকে T বিন্দু হইতে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য বলা হয়।

অনুশীলনী



1. BC, CA, AB যথাক্রমে D, E, F বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক।

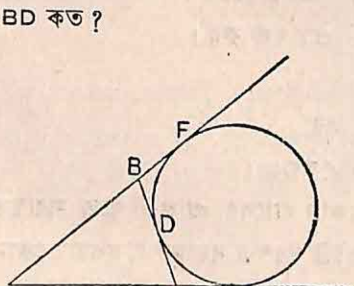
(*i*) BD = 3·4 সেঃ মিঃ, CE = 1·5 সেঃ মিঃ ও AF = 1·4 সেঃ মিঃ হইলে, ত্রিভুজ ABC-এর পরিসীমা কত?

(*ii*) AB = 4·8 সেঃ মিঃ ও CD = 1·5 সেঃ মিঃ হইলে, ত্রিভুজ ABC-এর পরিসীমা কত?

(*iii*) ত্রিভুজ ABC-এর পরিসীমা 12·6 সেঃ মিঃ এবং BD = 3·4 সেঃ মিঃ হইলে, AC কত?

(*iv*) ত্রিভুজ ABC-এর পরিসীমা 12·6 সেঃ মিঃ এবং BC = 4·9 সেঃ মিঃ হইলে, AF কত?

(*v*) AB = 4·8 সেঃ মিঃ, BC = 4·9 সেঃ মিঃ, CA = 2·9 সেঃ মিঃ হইলে, BD কত?



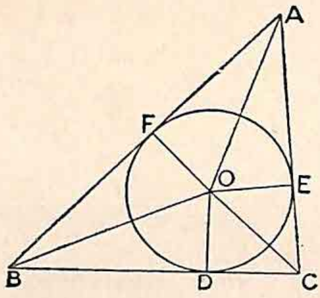
3. ABC ত্রিভুজের BC বাহু এবং AC ও AB-এর বর্ধিতাংশ যথাক্রমে বৃত্তকে D, E, F বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে।

(*i*) AB + BD = AC + CD বলিবার যুক্তি প্রদর্শন কর।

(*ii*) AE, △ABC-এর পরিসীমার অর্ধাংশ; ইহার পক্ষে যুক্তি প্রদর্শন কর।

(*iii*) যদি AB = 4 ইঃ, AC = 5 ইঃ এবং BC = 3 ইঃ হয়, তাহা হইলে BD = কত?

3. বৃত্তের কেন্দ্র O ; BC, CA, AB যথাক্রমে D, E, F বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক। OA, OB, OC এবং OD, OE, OF যুক্ত করা হইল।



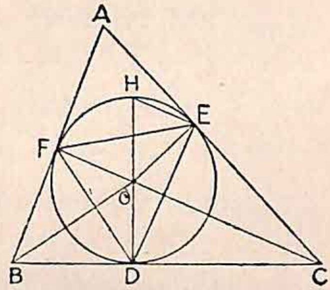
(i) ∠FBD = 46° হইলে, ∠BOD = কত ?

(ii) ∠COD = 48° হইলে, ∠DCE = কত ?

(iii) ∠FAO = 25° হইলে, ∠AOE কত ?

(iv) ∠OBC = 35°, ∠OCB = 40° হইলে, ∠AOF = কত এবং ∠AOE = কত ?

4. বৃত্তের কেন্দ্র O ; BC, CA, AB যথাক্রমে D, E, F বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক ; DH ব্যাস ; DE, EF, FD ; OB, OC, OF, OE ; EH যুক্ত করা হইল।



(i) ∠DEF = 56° হইলে,
∠BOD = কত ?
∠OBF = কত ?
∠FBD = কত ?

(ii) ∠DEH = 66° হইলে, ∠DCO = কত ? ∠ECO = কত ?
∠DCE = কত ?

(iii) ∠EDC = 65° হইলে, ∠COE = কত ?

(iv) ∠DEF = 67°, ∠DEF = 50° হইলে, ABC ত্রিভুজের কোণগুলি নির্ণয় কর।

(v) ∠ABC = 69°, ∠ACB = 47° হইলে, DEF ত্রিভুজের কোণগুলি নির্ণয় কর।

দ্বিতীয় খণ্ড

ভূমিকা

প্রতিজ্ঞা, স্বতঃসিদ্ধ, স্বীকার্য ও কাল্পনিক অঙ্কন

ঔপপত্তিক জ্যামিতি ঃ—এই পুস্তকে এ-পর্যন্ত একটি বিশেষ ধারায় জ্যামিতি শাস্ত্রের আলোচনা করা হইয়াছে। তোমরা চিত্রাঙ্কন করিয়া ও উপযুক্ত যন্ত্রাদি দ্বারা পরিমাপ করিয়া নানাবিধ জ্যামিতিক তথ্যের সন্ধান পাইয়াছ। বিভিন্ন চিত্রে, বিভিন্ন অবস্থানে একই তথ্য পরীক্ষা দ্বারা সমর্থিত হওয়ায় সাধারণভাবে এই তথ্যগুলি সত্য হইবে এরূপ মনে হইয়াছে। কিন্তু তৎসত্ত্বেও সন্দেহের অবকাশ থাকিয়া যায় যে সম্ভবতঃ এরূপ ক্ষেত্র থাকিতে পারে যেখানে এই তথ্য সমর্থিত হয় না। এই প্রকার সন্দেহ নিরসনের জন্য সর্বক্ষেত্রে প্রযোজ্য হয় এমন যুক্তি দ্বারা তথ্যগুলি সমর্থনযোগ্য কিনা তাহা বিচার করা প্রয়োজন। এইরূপ যুক্তি দ্বারা তথ্যগুলির সত্যতা প্রতিষ্ঠিত করিতে পারিলে তখনই সাধারণভাবে এগুলি স্বীকৃত হইতে পারে। **ঔপপত্তিক (Demonstrative) জ্যামিতিতে** এই রীতিতেই তথ্যের প্রতিষ্ঠা হইয়া থাকে।

প্রতিজ্ঞা (Proposition) ঃ—যুক্তিদ্বারা কোনও জ্যামিতিক তথ্যের প্রমাণ বা অঙ্কন বিষয়ক প্রস্তাবের নাম প্রতিজ্ঞা।

প্রতিজ্ঞা দ্বিবিধ—(1) **উপপাদ্য (Theorem),** (2) **সম্পাদ্য (Problem)**। উপপাদ্যে যুক্তির সাহায্যে জ্যামিতিক সত্য নিরূপিত হয় এবং সম্পাদ্যে যুক্তির উপর নির্ভর করিয়া জ্যামিতিক অঙ্কন সম্পন্ন হয় ও যুক্তির দ্বারা অঙ্কনের সার্থকতা প্রতিপন্ন করা হয়। প্রত্যেক প্রতিজ্ঞা চারি অংশে বিভক্ত ঃ—

(1) **সাধারণ নির্বচন (General Enunciation)** ঃ—এই অংশে প্রতিজ্ঞার বিষয়বস্তু সাধারণভাবে সরলভাষায় ব্যক্ত করা হয়। উপপাদ্যের সাধারণ নির্বচনের দুই অংশ—**কল্পনা (Hypothesis)**, অর্থাৎ যে জ্যামিতিক

সত্য ধরিয়া লওয়া হইয়াছে, এবং **সিদ্ধান্ত (Conclusion),** অর্থাৎ যে সত্য প্রতিষ্ঠিত করিতে হইবে। সম্পাদ্যের সাধারণ নির্বচনেরও দুই অংশ—**উপাত্ত (Data),** অর্থাৎ যাহা দেওয়া আছে, এবং **করণীয় (Quaesita),** অর্থাৎ যে অঙ্কন সম্পন্ন করিতে হইবে।

(2) **বিশেষ নির্বচন (Particular Enunciation) :**—এই অংশে সাধারণ নির্বচনে উল্লিখিত বিষয়কে চিত্রের সাহায্যে স্পষ্ট করিয়া বিবৃত করা হয়।

(3) **অঙ্কন (Construction) :**—প্রতিজ্ঞার সত্যতা নিরূপণের জন্য প্রয়োজনীয় অতিরিক্ত অঙ্কনাদি যে অংশে বর্ণিত হয় তাহাই **অঙ্কন** (সকল প্রতিজ্ঞার অঙ্কনের প্রয়োজন হয় না)।

(4) **প্রমাণ বা উপপত্তি (Proof) :**—কল্পনাকে ভিত্তি করিয়া প্রতিজ্ঞার সিদ্ধান্তে উপনীত হইবার জন্য যে যুক্তির অবতারণা করা হয় তাহাকে **প্রমাণ** বলে। প্রমাণ দুই প্রকার—**অন্বয়ী প্রমাণ (Direct Proof)** ও **ব্যতিরেকী প্রমাণ (Indirect Proof)**। কল্পনাকে ভিত্তি করিয়া প্রত্যক্ষভাবে যুক্তির সাহায্যে সিদ্ধান্তে উপনীত হইবার যে পদ্ধতি—তাহাই **অন্বয়ী প্রমাণ** ; অপর পক্ষে, যে জ্যামিতিক সত্য প্রতিষ্ঠিত করিতে হইবে তাহাকে অস্বীকার করিয়া যুক্তি দ্বারা যদি এরূপ কোনও সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায় যাহা অসম্ভব বা কল্পনাবিরুদ্ধ—তাহা হইলে এইরূপ অনুমিত হয় যে মূল সিদ্ধান্তটি অস্বীকার করার উপায় নাই। এইরূপ প্রমাণের যে পদ্ধতি, তাহাই **ব্যতিরেকী প্রমাণ**।

বিপরীত প্রতিজ্ঞা (Converse Proposition) :—দুইটি উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা যদি এরূপ সম্বন্ধবিশিষ্ট হয় যে একটির কল্পনা ও সিদ্ধান্ত যথাক্রমে অপরটির সিদ্ধান্ত ও কল্পনা—অর্থাৎ প্রথমটিতে যে সত্য প্রমাণিত দ্বিতীয়টিতে তাহা কল্পনা এবং প্রথমটিতে যাহা কল্পনা দ্বিতীয়টিতে তাহাই প্রমাণিত—তাহা হইলে প্রতিজ্ঞা দুইটিকে পরস্পরের বিপরীত প্রতিজ্ঞা বলে।

সাধারণতঃ বিপরীত প্রতিজ্ঞা প্রমাণ করিতে ব্যতিরেকী প্রমাণ-পদ্ধতি ব্যবহৃত হইয়া থাকে। সকল প্রতিজ্ঞার বিপরীত প্রতিজ্ঞা সর্বদা সত্য নহে।

অনুসিদ্ধান্ত (Corollary) :—মূল প্রতিজ্ঞার সিদ্ধান্ত হইতে

যে তথ্য পৃথক প্রমাণ ব্যতিরেকে অনুমান করা যায় তাহাকে উহার অনুসিদ্ধান্ত বলে।

স্বতঃসিদ্ধ (Axiom):—গণিতশাস্ত্রের কোন সত্য প্রমাণ করিতে হইলে যুক্তির অবতারণা করিতে হয়। এই সকল যুক্তিগুলি আবার এমন কতকগুলি মূল এবং প্রাথমিক সত্যের উপর প্রতিষ্ঠিত যাহাদের সত্যতা সম্বন্ধে মনে কোনও প্রশ্নই উঠে না। ইহারা এত সরল ও সহজে বোধগম্য যে ইহাদের কোন প্রমাণের আবশ্যক হয় না। প্রমাণ-নিরপেক্ষ এই সত্যগুলিকে স্বতঃসিদ্ধ বলে।

স্বতঃসিদ্ধ দুই প্রকারের—সাধারণ ও জ্যামিতিক। সাধারণ স্বতঃসিদ্ধগুলি গণিতশাস্ত্রের যে-কোন শাখায় ব্যবহৃত হয়, জ্যামিতিক স্বতঃসিদ্ধগুলি কেবলমাত্র জ্যামিতিক প্রমাণেই ব্যবহৃত হয়।

কতকগুলি সাধারণ স্বতঃসিদ্ধ :—

(*i*) যে সকল বস্তু বা রাশি একই বস্তু বা রাশির সহিত সমান তাহারা পরস্পর সমান।

(*ii*) যে সকল বস্তু বা রাশি একই বা সমান সমান বস্তু বা রাশির সমান গুণ (বা সমান অংশ) তাহারা পরস্পর সমান।

(*iii*) সমান সমান বস্তু বা রাশি একই বা সমান সমান বস্তু বা রাশির সহিত যোগ (বা বিয়োগ) করিলে যোগফল (বা বিয়োগফল)-গুলি পরস্পর সমান।

(*iv*) সমান সমান বস্তু বা রাশি দুই বা ততোধিক অসমান বস্তু বা রাশির সহিত যোগ করিলে (বা ঐরূপ রাশি হইতে বিয়োগ করিলে) যোগফল (বা বিয়োগফল)-গুলি অসমান হইবে।

(*v*) কোনও বস্তু বা রাশি তাহার যে-কোন অংশ অপেক্ষা বৃহত্তর।

(*vi*) কোনও বস্তু বা রাশিকে কতকগুলি অংশে ভাগ করিলে অংশগুলির সমষ্টি সমগ্র বস্তু বা রাশির সহিত সমান হইবে।

কতকগুলি জ্যামিতিক স্বতঃসিদ্ধ :—

(*i*) দুইটি সরলরেখা কোনও একটি ক্ষেত্র সীমাবদ্ধ করিতে পারে না।

(*ii*) অবস্থিতি যেমনই হউক না কেন, সকল সমকোণই পরস্পর সমান।

(*iii*) যে সকল জ্যামিতিক রাশি (রেখা, কোণ বা ক্ষেত্র) একটির উপর অপর একটি স্থাপন করিলে সমাপতিত হয় অর্থাৎ সম্পূর্ণরূপে মিলিয়া যায় তাহারা পরস্পর সমান। একই জাতীয় জ্যামিতিক রাশির তুলনার জন্য এই পদ্ধতি ব্যবহৃত হইয়া থাকে। ইহাকে **উপরিপাত (Superposition)** বলে।

অপেক্ষাকৃত জটিল স্বতঃসিদ্ধগুলি যথাস্থানে আলোচিত হইবে।

স্বীকার্য (Postulate) :—জ্যামিতিক সত্য প্রতিষ্ঠিত করিতে হইলে এমন কয়েকটি সহজ ও প্রাথমিক অঙ্কনের প্রয়োজনীয়তা আসে যাহা সম্পন্ন করা সম্ভব বলিয়া স্বীকার করিয়া লইয়া অগ্রসর হইতে হয়। ইহাদিগকে **স্বীকার্য** বলে। যথা—

মাপনীর সাহায্যে—

(*i*) কোনও নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে অপর যে-কোন বিন্দু পর্যন্ত একটি সরলরেখা অঙ্কন করা যায়।

(*ii*) একটি সসীম সরলরেখাকে উভয় দিকে যতদূর ইচ্ছা বর্ধিত করা যায়।

কম্পাসের সাহায্যে—

(*iii*) যে-কোন বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং যে-কোন দৈর্ঘ্যের সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন করা যায়।

লক্ষ্য করিবে—স্বতঃসিদ্ধ প্রমাণ-সম্পর্কিত এবং স্বীকার্য অঙ্কন-সম্পর্কিত।

কাল্পনিক অঙ্কন (Hypothetical Construction) :—কোন জ্যামিতিক সত্য প্রমাণের জন্য স্বীকার্য ব্যতীত আরও কতকগুলি সহজ অঙ্কন সম্ভব বলিয়া মানিয়া লওয়া হয়—ইহাদিগকে **কাল্পনিক অঙ্কন** বলে। যথা—

(*i*) কোনও সরলরেখাস্থ কোনও বিন্দুতে বা উহার বহিঃস্থ কোনও বিন্দু হইতে ঐ সরলরেখার উপর একটি লম্ব অঙ্কন করা যাইতে পারে।

(*ii*) কোনও নির্দিষ্ট কোণকে একটি সরলরেখা দ্বারা দ্বিখণ্ডিত করা যায়।

(*iii*) কোনও নির্দিষ্ট সরলরেখাকে উহার একটি বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত করা যায়।

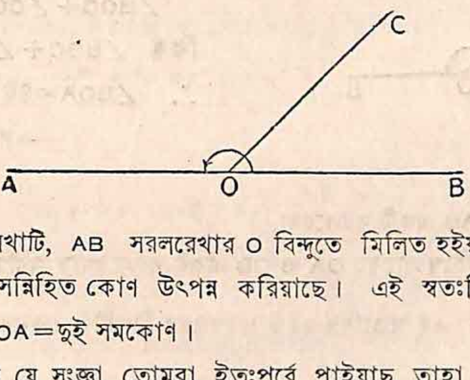
(*iv*) একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার বহিঃস্থ কোনও নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে ঐ সরলরেখার সমান্তরাল একটি সরলরেখা টানা যাইতে পারে।

প্রথম অধ্যায়

কোণ-বিষয়ক স্বতঃসিদ্ধ ও উপপাদ্য

স্বতঃসিদ্ধ **(1)** ঃ—একটি সরলরেখার কোন এক বিন্দুতে অপর একটি সরলরেখা মিলিত হইলে যে দুইটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন হয় তাহাদের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

[If a straight line stands on another straight line, the sum of the two adjacent angles so formed is equal to two right angles.]



CO সরলরেখাটি, AB সরলরেখার O বিন্দুতে মিলিত হইয়া BOC এবং COA এই দুইটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। এই স্বতঃসিদ্ধ অনুসারে $\angle BOC + \angle COA =$ দুই সমকোণ।

সরলকোণের যে সংজ্ঞা তোমরা ইতঃপূর্বে পাইয়াছ তাহা হইতেই এই সত্যটি সুস্পষ্ট।

AB সরলরেখার O বিন্দুতে CO মিলিত হওয়ায় উৎপন্ন সন্নিহিত কোণদ্বয়ের সমষ্টি, অর্থাৎ—

$\angle BOC + \angle COA$

$=$ সরলকোণ $\angle BOA$ (কারণ AB একটি সরলরেখা)

$=$ দুই সমকোণ।

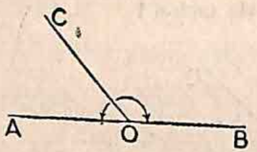
স্বতঃসিদ্ধ (2) ঃ—দুইটি সন্নিহিত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হইলে উহাদের বহিঃস্থ বাহুদ্বয় একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

[If the sum of two adjacent angles is equal to two right angles, the exterior arms of the angles are in the same straight line.]

এখানে BOC ও COA এই সন্নিহিত কোণদ্বয়ের সম্বন্ধ এরূপ যে

$\angle BOC + \angle COA =$ দুই সমকোণ।

এই স্বতঃসিদ্ধ অনুসারে OA ও OB একই সরলরেখায় অবস্থিত।



দেওয়া আছে

$\angle BOC + \angle COA =$ দুই সমকোণ

কিন্তু $\angle BOC + \angle COA = \angle BOA$

$\therefore$ $\angle BOA =$ দুই সমকোণ

= সরলকোণ

স্বতরাং AB একটি সরলরেখা,

অর্থাৎ বহিঃস্থ বাহুদ্বয় OA ও OB একই সরলরেখায় অবস্থিত।

মন্তব্য ঃ এই স্বতঃসিদ্ধ দুইটি পরস্পরের বিপরীত, কেননা—

স্বতঃ 1-এ—প্রদত্ত—OA, OB একই সরলরেখায় অবস্থিত

সিদ্ধান্ত—$\angle BOC + \angle COA =$ দুই সমকোণ।

স্বতঃ 2-এ—প্রদত্ত—$\angle BOC + \angle COA =$ দুই সমকোণ।

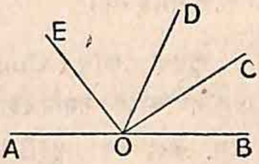
সিদ্ধান্ত—OA, OB একই সরলরেখায় অবস্থিত।

এই দুইটি স্বতঃসিদ্ধ হইতে কয়েকটি অনুসিদ্ধান্ত সুস্পষ্ট। যথা—

অনুসিদ্ধান্ত-1 ঃ—একটি সরলরেখার কোনও বিন্দুতে ঐ রেখার একই

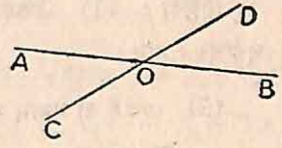
পার্শ্বে কতকগুলি সরলরেখা মিলিত হইলে যে কোণগুলি উৎপন্ন হয়, তাহাদের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

যথা—(পার্শ্বস্থ চিত্রে)



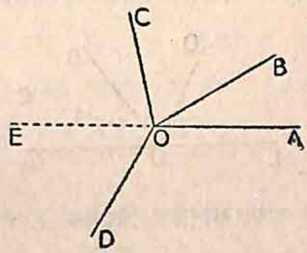
$\angle BOC + \angle COD + \angle DOE + \angle EOA =$ দুই সমকোণ।

অনু-2 ঃ—দুইটি সরলরেখা পরস্পর এক বিন্দুতে ছেদ করিলে যে চারিটি কোণ উৎপন্ন হয়, তাহাদের সমষ্টি চারি সমকোণের সমান। যথা—



$\angle BOD + \angle DOA + \angle AOC + \angle COB =$ চারি সমকোণ।

অনু-3 ঃ—কতকগুলি সরলরেখা একটি বিন্দুতে মিলিত হইলে যে কোণগুলি উৎপন্ন হয় তাহাদের সমষ্টি চারি সমকোণের সমান।



রেখাগুলির যে-কোনও একটি, যথা, AO-কে E পর্যন্ত বর্ধিত করিলে কোণগুলির সমষ্টি হইবে।

$(\angle AOB = \angle BOC + \angle COE) + (\angle EOD + \angle DOA) =$ দুই সমকোণ + দুই সমকোণ = চারি সমকোণ।

সংজ্ঞা

সম্পূরক কোণ (Supplementary angles) ঃ দুইটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হইলে উহাদের যে-কোনটিকে অপরটির **সম্পূরক** (**Supplement**) বলে এবং কোণ দুইটি পরস্পরের সম্পূরক। যথা—60° ও 120°, 80° 20′ ও 99° 40′ ইত্যাদি।

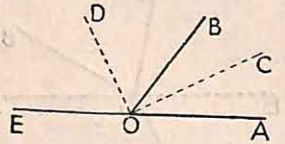
স্পষ্টতঃ, সূক্ষ্মকোণের সম্পূরক স্থূলকোণ ও স্থূলকোণের সম্পূরক অবশ্যই সূক্ষ্মকোণ হইবে, অর্থাৎ দুইটি সূক্ষ্মকোণ বা দুইটি স্থূলকোণ পরস্পরের সম্পূরক হইতে পারে না।

পূরক কোণ (Complementary angles) : দুইটি কোণের সমষ্টি এক সমকোণের সমান হইলে যে-কোনটিকে অপরটির **পূরক (Complement)** বলে, এবং কোণ দুইটি পরস্পরের পূরক। যথা—40° ও 50°, 25° 30′ ও 64° 30′ ইত্যাদি।

দ্রষ্টব্য :—(1) একই বা সমান সমান কোণের সম্পূরক কোণগুলি পরস্পর সমান।

(2) একই বা সমান সমান কোণের পূরক কোণগুলি পরস্পর সমান।

অন্তর্দ্বিখণ্ডক (Internal bisector) ও বহির্দ্বিখণ্ডক (External bisector) : কোন নির্দিষ্ট কোণের একটি বাহু শীর্ষবিন্দুর দিকে বর্ধিত করিলে যে সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন হয় তাহাকে নির্দিষ্ট কোণটির **বহিঃকোণ (Exterior angle)** বলে, এবং নির্দিষ্ট কোণটিকে **অন্তঃকোণ (Interior angle)** বলে।



অন্তঃকোণটির দ্বিখণ্ডক সরলরেখাকে **অন্তর্দ্বিখণ্ডক** ও বহিঃকোণটির দ্বিখণ্ডক সরলরেখাকে **বহির্দ্বিখণ্ডক** বলে। পার্শ্বস্থ চিত্রে AOB কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক OC এবং বহির্দ্বিখণ্ডক OD।

অনুশীলনী

1. নিম্নলিখিত কোণগুলির সম্পূরক কোণ নির্ণয় কর :—
68°, 129°, 128°, 23′, 99° 8″, $1\frac{1}{2}$ সমকোণ, সরলকোণের $\frac{2}{3}$ অংশ।

2. নিম্নলিখিত কোণগুলির পূরক কোণ নির্ণয় কর :—
36°, 71°, 36° 6′, 65° 19′ 28″, $\frac{2}{3}$ সমকোণ, সরলকোণের $\frac{1}{3}$ অংশ।

3. (*i*) দুইটি পূরক কোণের একটি অপরটির পাঁচগুণ ; কোণ দুইটি কত ?

(*ii*) একটি কোণের তিনগুণ ও সাতগুণ পরস্পর সম্পূরক হইলে কোণটির পরিমাণ কত ?

4. দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিলে যে কোণগুলি উৎপন্ন হয় তাহাদের—

(*i*) একটি সমকোণ হইলে প্রমাণ কর যে অপর কোণগুলিও সমকোণ হইবে ; (*ii*) একটি 60° হইলে, অপর কোণগুলির মান নির্ণয় কর।

5. প্রমাণ কর যে কোন কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডক পরস্পর লম্ব।

[The internal and external bisectors of an angle are at right angles to one another.]

6. AOB কোণের AO বাহু E পর্যন্ত বর্ধিত হইয়াছে এবং OC, OD যথাক্রমে $\angle$AOB-এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডক। $\angle$AOB-এর পরিমাণ x° হইলে প্রমাণ কর, $\angle AOD = 90^\circ + \frac{1}{2}x^\circ$ এবং $\angle EOD = 90^\circ - \frac{1}{2}x^\circ$।

7. AB সরলরেখার O বিন্দু হইতে AB-এর উভয় পার্শ্বে OC, OD এরূপে টানা হইল যে $\angle AOC = \angle AOD$; প্রমাণ কর যে $\angle BOC = \angle BOD$।

8. AB সরলরেখার O বিন্দু হইতে AB-এর উভয় পার্শ্বে OC, OD এরূপ ভাবে টানা হইল যে $\angle BOC = \angle AOD$; প্রমাণ কর যে OC এবং OD একই সরলরেখায় অবস্থিত।

9. চারিটি সরলরেখা এক বিন্দুতে মিলিত হইয়া চারিটি সমকোণ উৎপন্ন করিলে প্রমাণ কর যে ঐ চারিটি সরলরেখা প্রকৃতপক্ষে দুইটি সরলরেখা।

10. দুইটি সন্নিহিত কোণের দ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব হইলে প্রমাণ কর যে উহাদের বহিঃস্থ বাহুদ্বয় একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

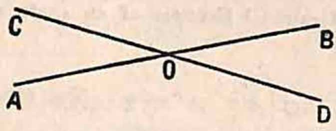
11. কাগজের উপর একটি সরলরেখা AB টান ও উহার উপর একটি বিন্দু O লও ; কাগজখানিকে O বিন্দু দিয়া এরূপে ভাঁজ কর যেন OA, OB-এর উপর পড়ে। এখন কাগজখানির ভাঁজ খুলিলে ভাঁজের যে দাগটি পাইবে, প্রমাণ কর উহা AB-এর উপর লম্ব।

———

উপপাদ্য 1

দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিলে, বিপ্রতীপ কোণদ্বয় পরস্পর সমান হইবে।

[If two straight lines intersect, the vertically opposite angles are equal.]



মনে কর, AB, CD সরলরেখাদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(1) ∠AOC = বিপ্রতীপ ∠DOB

(2) ∠AOD = বিপ্রতীপ ∠COB

প্রমাণঃ AB সরলরেখার O বিন্দুতে OC মিলিত হওয়ায়

∠AOC + ∠COB = দুই সমকোণ।

আবার, CD সরলরেখার O বিন্দুতে OB মিলিত হওয়ায়

∠DOB + ∠COB = দুই সমকোণ।

∴ ∠AOC + ∠COB = ∠DOB + ∠COB

ইহাদের সাধারণ অংশ ∠COB বাদ দিলে,

∠AOC = ∠DOB

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে,

∠AOD = ∠COB

বিকল্প প্রমাণ :—(রেখার ঘূর্ণনের সাহায্যে)

মনে কর, O বিন্দুকে স্থির রাখিয়া CD সরলরেখাটি (ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে) ঘুরিতে আরম্ভ করিল এবং OD অংশ OB-এর সহিত মিলিয়া স্থির হইল। এই অবস্থানে DO-এর বর্ধিতাংশ OC, স্পষ্টতঃই BO-এর বর্ধিতাংশ OA-এর সহিত মিলিত হইবে (কারণ AB, CD উভয়েই সরলরেখা)।

স্থতরাং দেখা গেল, যে-পরিমাণ ঘূর্ণনের ফলে OD, OB অবস্থানে আসে, ঠিক সেই পরিমাণ ঘূর্ণনেই OC, OA অবস্থানে আসিবে।

$$\therefore \quad \angle AOC = \angle DOB$$

অনুশীলনী

1. দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিলে উৎপন্ন কোণগুলির যে-কোনটির দ্বিখণ্ডক রেখা ছেদবিন্দুর দিকে বর্ধিত করিলে উহা বিপ্রতীপ কোণটিকেও দ্বিখণ্ডিত করিবে।

2. প্রমাণ কর যে, দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিলে যে-কোন বিপ্রতীপ কোণযুগলের দ্বিখণ্ডকদ্বয় একই সরলরেখায় অবস্থিত।

[Prove that if two straight lines intersect, the bisectors of any pair of vertically opposite angles are in the straight line.]

3. AOB ও BOC দুইটি সন্নিহিত কোণ। OD যদি $\angle BOC$-কে দ্বিখণ্ডিত করে, প্রমাণ কর, $2\angle AOD = \angle AOB + \angle AOC$।

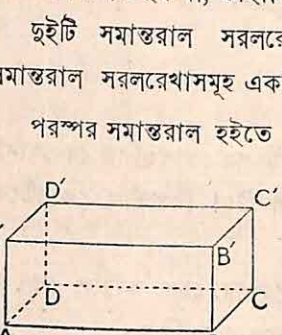
দ্বিতীয় অধ্যায়

সমান্তরাল সরলরেখা ও তাহার ধর্ম

সমান্তরাল সরলরেখা (**Parallel Straight lines**) :—একই সমতলে অবস্থিত যে-সকল সরলরেখা উভয়দিকে যথেচ্ছ বর্ধিত হইলেও কখনও পরস্পর মিলিত হয় না, তাহাদিগকে সমান্তরাল সরলরেখা বলে।

দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব সর্বত্রই সমান। পরস্পর সমান্তরাল সরলরেখাসমূহ একই দিক নির্দেশ করে।

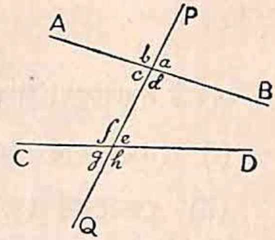
পরস্পর সমান্তরাল হইতে হইলে সরলরেখাসমূহ অবশ্যই একই সমতলে অবস্থিত হইবে। পার্শ্বস্থ চিত্রে AB ও A′B′ সমান্তরাল, কিন্তু AB ও DD′ সরলরেখাদ্বয় এরূপে অবস্থিত যে তাহারা যথেচ্ছ বর্ধিত হইলেও কোন বিন্দুতে মিলিত হইবে না, কিন্তু একই সমতলে অবস্থিত নয় বলিয়া তাহারা সমান্তরাল নহে। এরূপ রেখাকে **নৈকতলীয় (Skew)** রেখা বলে।



দ্রষ্টব্য : দুইটি সরলরেখা একই সমতলে অবস্থিত কিনা তাহা জানিতে হইলে এরূপ একটি সমতল কল্পনা করিতে হইবে যাহার উপর রেখা দুইটির যে-কোনটি অবস্থিত হইতে পারে ; এখন এই রেখাটি স্থির রাখিয়া সমতলটিকে ইচ্ছামত ঘুরাইয়া যদি এরূপ অবস্থানে আনা যায় যে অপর রেখাটিও এই অবস্থানে সমতলটির উপর অবস্থিত হইতেছে, তাহা হইলে রেখা দুইটি একই সমতলে অবস্থিত বলিয়া জানিতে হইবে, নতুবা তাহারা এক সমতলস্থ নহে।

ভেদক (**Transversal**) :—একটি সরলরেখা দুই বা ততোধিক সরলরেখাকে ছেদ করিলে, পূর্বোক্ত রেখাটিকে ভেদক বলে।

পার্শ্বস্থ চিত্রে PQ ভেদক AB ও CD রেখাদ্বয়কে ছেদ করায় ছেদবিন্দুদ্বয়ের a, b, c, d, e, f, g, h এই আটটি কোণ উৎপন্ন হইয়াছে। প্রকারভেদে এই কোণগুলিকে নিম্নরূপে অভিহিত করা হয়।



(*i*) a, b, g, h কোণগুলি **বহিঃকোণ (Exterior angles)**;

(*ii*) d, c, f, e কোণগুলি **অন্তঃকোণ (Interior angles)**।

তন্মধ্যে (d, e) কিংবা (c, f) ভেদকের **একই পার্শ্বস্থ অন্তঃকোণযুগল (Interior angles on the same side)**।

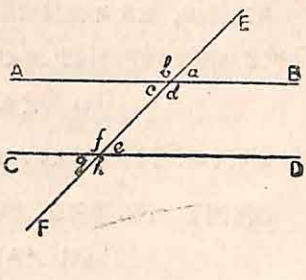
(*iii*) (c, e) কিংবা (d, f) কোণযুগল **একান্তর কোণ (Alternate angles)**;

(*iv*) (a, e), (b, f), (h, d), (g, c) **কোণগুলি অনুরূপ কোণ (Corresponding angles)**। অনুরূপ কোণযুগল, যথা a ও e-এর মধ্যে a-কে **বহিঃকোণ (Exterior angle)** এবং e-কে **একই পার্শ্বস্থ বিপরীত অন্তঃকোণ (Interior opposite angle on the same side)** বলে।

স্বতঃসিদ্ধ ঃ একটি সরলরেখা অপর দুইটি সরলরেখাকে ছেদ করিলে যদি যে-কোন অনুরূপ কোণযুগল পরস্পর সমান হয় তাহা হইলে ঐ সরলরেখাদ্বয় সমান্তরাল হইবে।

[When a straight line cuts two other straight lines these other two straight lines are parallel if a pair of corresponding angles are equal]

মনে কর, EF সরলরেখাটি AB ও CD সরলরেখাদ্বয়কে ছেদ করায় যে-কোন দুইটি অনুরূপ কোণ (ধর—a ও e) সমান হইয়াছে, তাহা হইলে AB এবং CD সমান্তরাল হইবে।



উপপাদ্য 2

একটি সরলরেখা অপর দুইটি সরলরেখাকে ছেদ করিলে, যদি

(*i*) (যে-কোন) একান্তর কোণদ্বয় পরস্পর সমান হয়, অথবা

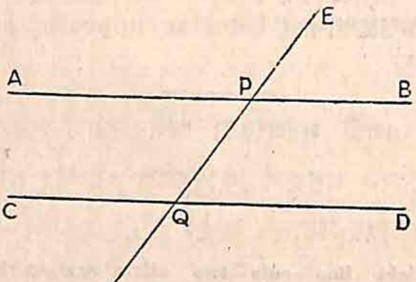
(*ii*) ভেদকের (যে-কোন) একই পার্শ্বস্থ অন্তঃকোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হয়,

তাহা হইলে শেষোক্ত সরলরেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হইবে।

[When a straight line cuts two other straight lines, these other two straight lines are parallel if,

either, (i) a pair of alternate angles are equal,

or, (ii) a pair of interior angles on the same side of the cutting line are together equal to two right angles.]



মনে কর, EF সরলরেখাটি AB ও CD সরলরেখাদ্বয়কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে এরূপে ছেদ করিয়াছে যে,

(*i*) ∠APQ = একান্তর ∠PQD

প্রমাণ করিতে হইবে যে AB ও CD সমান্তরাল।

প্রমাণ ঃ যেহেতু কল্পনানুযায়ী ∠APQ = ∠PQD

এবং ∠APQ = বিপ্রতীপ ∠EPB

সুতরাং ∠EPB = ∠PQD এবং ইহারা অনুরূপ কোণ,

∴ AB ও CD সমান্তরাল।

(*ii*) EF-এর একই পার্শ্বস্থ অন্তঃকোণদ্বয়ের সমষ্টি, অর্থাৎ,

∠BPQ + ∠PQD = দুই সমকোণ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে AB ও CD সমান্তরাল।

প্রমাণ ঃ EF সরলরেখার সহিত PB সরলরেখা মিলিত হওয়ায়,

∠EPB + ∠BPQ = দুই সমকোণ।

আবার, ∠BPQ + ∠PQD = দুই সমকোন। (কল্পনা)

∴ ∠EPB + ∠BPQ = ∠BPQ + ∠PQD

ইহাদের মধ্যে সাধারণ অংশ ∠BPQ বাদ দিলে,

∠EPB = ∠PQD এবং ইহারা অনুরূপ কোণ ;

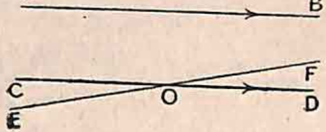
∴ AB ও CD সমান্তরাল।

প্লেফেয়ারের স্বতঃসিদ্ধ (Playfair's Axiom)

দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখা উভয়েই একই সরলরেখার সমান্তরাল হইতে পারে না।

[Two intersecting straight lines cannot both be parallel to a third stright line.]

মনে কর, AB ও CD দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা এবং EF রেখা CD-কে O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। AB ও CD সমান্তরাল বলিয়া একই দিক নির্দেশ করিতেছে, কিন্তু



CD ও EF একটি বিন্দুতে ছেদ করায় উহারা ভিন্ন দিক নির্দেশ করিতেছে। সুতরাং AB ও EF দ্বারা বিভিন্ন দিক নির্দিষ্ট হওয়ায় সমান্তরাল হইতে পারে না।

এই স্বতঃসিদ্ধটি হইতে পাওয়া যায় যে কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল মাত্র একটি সরলরেখাই অঙ্কিত হইতে পারে।

উপপাদ্য 3

একটি সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে ছেদ করিলে,

(*i*) (যে-কোন) অনুরূপ কোণদ্বয় পরস্পর সমান হইবে ;

(*ii*) (যে-কোন) একান্তর কোণদ্বয় পরস্পর সমান হইবে ; এবং

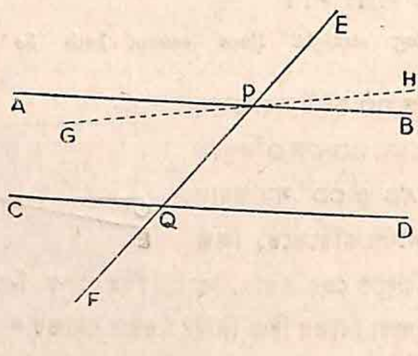
(*iii*) ভেদকের (যে-কোন) একই পার্শ্বস্থ অন্তঃকোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হইবে।

[If a straight line cuts two parallel straight lines, it makes

(i) the corresponding angles equal to one another :

(ii) the alternate angles equal to one another ;

(iii) the two interior angles on the same side of the cutting line together equal to two right angles.]



মনে কর, EF সরলরেখাটি AB ও CD সমান্তরাল রেখাদ্বয়কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(i) ∠EPB = অনুরূপ ∠PQD

(ii) ∠APQ = একান্তর ∠PQD

(iii) EF-এর একই পার্শ্বস্থ অন্তঃকোণদ্বয়ের সমষ্টি,

অর্থাৎ ∠BPQ + ∠PQD = দুই সমকোণ।

প্রমাণঃ (i) যদি ∠EPB, ∠PQD-এর সমান না হয়, তাহা হইলে মনে কর, P বিন্দু দিয়া GPH সরলরেখাটি এরূপভাবে টানা হইয়াছে যে ∠EPH = ∠PQD। এখন, EPH ও PQD এই অনুরূপ কোণদ্বয় পরস্পর সমান হওয়ায়,

GH ও CD সমান্তরাল হইবে,

কিন্তু কল্পনানুসারে, AB ও CD সমান্তরাল ;

তাহা হইলে, একই P বিন্দুগামী দুইটি বিভিন্ন সরলরেখা AB ও GH উভয়েই একই সরলরেখা CD-এর সমান্তরাল—ইহা অসম্ভব।—(প্লেফেয়ারের স্বতঃসিদ্ধ)

∴ ∠EPB ও ∠PQD অসমান নহে

অর্থাৎ ∠EPB = ∠PQD.

(ii) যেহেতু ∠APQ = বিপ্রতীপ ∠EPB

এবং ∠EPB = অনুরূপ ∠PQD (প্রমাণিত)

∴ ∠APQ = ∠PQD.

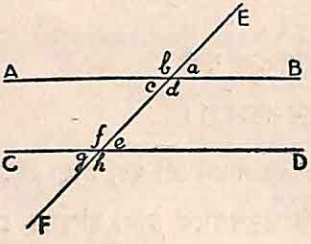
(iii) EF সরলরেখার P বিন্দুতে PB মিলিত হওয়ায়,

∠BPQ + ∠EPB = দুই সমকোণ,

কিন্তু ∠EPB = অনুরূপ ∠PQD (প্রমাণিত)

∴ ∠BPQ + ∠PQD = দুই সমকোণ

মন্তব্য ঃ 1. (i)-এর অনুরূপ (ii) ও (iii) স্বতন্ত্র প্রমাণ দ্বারা সিদ্ধ হইতে পারে।



2. লক্ষ্য করিবে যে পার্শ্বস্থ চিত্রে AB এবং CD এই দুই সমান্তরাল সরলরেখাকে EF ছেদ করায় যে আটটি কোণ উৎপন্ন হইয়াছে তাহাদের মধ্যে

(1) $a=c=e=g$; $b=d=f=h$

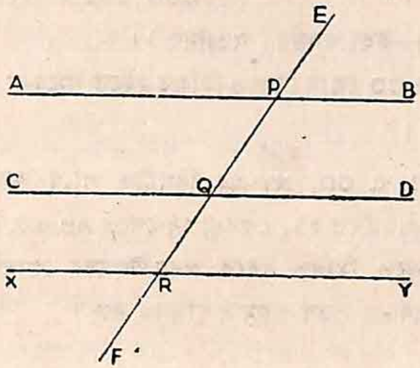
(2) $d+e=a+h=c+f=b+g=$ দুই সমকোণ।

অনিউক্লিডীয় জ্যামিতি ঃ বিখ্যাত জ্যামিতিবিদ্ ইউক্লিড সমান্তরাল সরলরেখা সম্বন্ধীয় তথ্যগুলি প্রমাণের জন্য যে স্বতঃসিদ্ধটি ব্যবহার করিয়াছিলেন তাহা এইরূপ—একটি সরলরেখা অপর দুইটি সরলরেখাকে ছেদ করিলে যদি একই পার্শ্বস্থ অন্তঃকোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয় তাহা হইলে ঐ সরলরেখাদ্বয়কে ছেদকের সেই পার্শ্বে বর্ধিত করিলে তাহারা কোন বিন্দুতে পরস্পর মিলিত হইবে। এই সত্যটি প্রমাণসাপেক্ষ ও জটিল মনে হওয়ায় স্কট্ল্যাণ্ডের গণিতজ্ঞ প্লেফেয়ার উল্লিখিত অপেক্ষাকৃত সহজ স্বতঃসিদ্ধটি ব্যবহার করিয়াছেন। প্লেফেয়ারের স্বতঃসিদ্ধটিও অন্যান্য স্বতঃসিদ্ধের ন্যায় সহজে বোধগম্য নয় বলিয়া পরবর্তী পণ্ডিতগণ এইরূপ কোন স্বতঃসিদ্ধ গ্রহণ না করিয়া জ্যামিতি-শাস্ত্র প্রণয়নের চেষ্টা করিয়াছেন এবং সেই চেষ্টার ফলে সম্পূর্ণ নূতন ধরণের জ্যামিতির উদ্ভব হইয়াছে। ইহা অনিউক্লিডীয় (Non-Euclidian) জ্যামিতি নামে পরিচিত।

উপপাদ্য 4

একই সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখাসমূহ পরস্পর সমান্তরাল।

[Straight lines parallel to the same straight line are parallel to one another.]



মনে কর, দুইটি সরলরেখা AB ও CD উভয়েই XY-এর সমান্তরাল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB ও CD পরস্পর সমান্তরাল।

মনে কর, EF একটি ভেদক ; ইহা AB, CD, XY-কে যথাক্রমে P, Q, R বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ : যেহেতু AB ও XY সমান্তরাল এবং EF ভেদক,

∴ $\angle EPB =$ অনুরূপ $\angle PRY$

আবার, যেহেতু CD ও XY সমান্তরাল এবং EF ভেদক,

∴ $\angle PQD =$ অনুরূপ $\angle PRY$

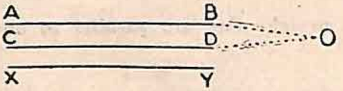
সুতরাং $\angle EPB = \angle PQD$

এবং ইহারা অনুরূপ কোণ

∴ AB ও CD সমান্তরাল।

বিকল্প প্রমাণ ঃ—(প্লেফেয়ারের স্বতঃসিদ্ধের সাহায্যে)

AB ও CD সমান্তরাল না হইলে উহাদের বর্ধিতাংশদ্বয় কোন এক বিন্দু O-তে মিলিত হইবে। এখন দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখা ABO এবং CDO উভয়েই অপর একটি সরলরেখা XY-এর সমান্তরাল—ইহা অসম্ভব (স্বতঃসিদ্ধ)।

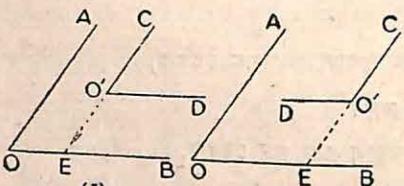


সুতরাং AB ও CD কোন বিন্দুতে মিলিত হইতে পারে না, অর্থাৎ AB ও CD পরস্পর সমান্তরাল।

মন্তব্য ঃ AB ও CD, XY-এর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত হইলে এই উপপাদ্যটি স্বতঃই প্রমাণিত হয় ; কেননা সে-ক্ষেত্রে AB এবং CD সমান্তরাল না হইলে একটি বিন্দুতে মিলিত হইবে অথচ উহাদের কোনটি XY-কে কোন বিন্দুতে ছেদ করিবে না, এরূপ অনুমান যুক্তিসহ নহে।

অনুশীলনী

1. দুইটি কোণের একটির দুই বাহু যথাক্রমে অপরটির দুই বাহুর সমান্তরাল হইলে, কোণ দুইটি সমান অথবা পরস্পর সম্পূরক হইবে।



AOB এবং CO′D এই কোণ দুইটির বাহুদ্বয় OA, O′C সমান্তরাল এবং OB, O′D সমান্তরাল।

(প্রয়োজন মত) CO′-কে বর্ধিত করিয়া OB-এর সহিত E বিন্দুতে মিলিত করা হইল। এখন,

[চিত্র (I)] ∠CO′D = অনুরূপ ∠O′EB = অনুরূপ ∠AOB

[চিত্র (II)] ∠CO′D = অনুরূপ ∠O′EO = ∠AOB-এর সম্পূরক।

2. কোন সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর—

(*i*) একান্তর কোণদ্বয়ের দ্বিখণ্ডকদ্বয় সমান্তরাল ;

(*ii*) অনুরূপ কোণদ্বয়ের দ্বিখণ্ডকদ্বয় সমান্তরাল ;

(*iii*) একই পার্শ্বস্থ অন্তঃকোণদ্বয়ের দ্বিখণ্ডক দুইটি ভেদকের সহিত যে কোণ দুইটি উৎপন্ন করে তাহাদের সমষ্টি এক সমকোণ।

3. যে সকল সরলরেখা একই সরলরেখার উপর লম্ব তাহারা পরস্পর সমান্তরাল।

[Straight lines which are perpendicular to the same straight line are parallel to one another.]

4. কতকগুলি সমান্তরাল সরলরেখার কোন ভেদক যদি উহাদের একটির উপর লম্ব হয় তাহা হইলে উহা অপরগুলির উপরও লম্ব হইবে।

[If a straight line meets two or more parallel straight lines and is perpendicular to one of them, it is also perpendicular to all the others.]

5. কোন কোণের একটি বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা ঐ কোণের দ্বিখণ্ডক ও অপর বাহুর সহিত যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তাহার দুইটি কোণ সমান হইবে।

[Prove that two of the angles of the triangle formed by one of the arms of an angle, its bisector and any straight line parallel to the other arm are equal.]

6. AB ও CD দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে অপর দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা AC ও BD যথাক্রমে A, C ও B, D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর, CAB ও CDB কোণদ্বয়ের দ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল।

তৃতীয় অধ্যায়

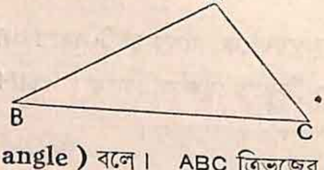
ঋজুরেখ-ক্ষেত্র ও ত্রিভুজ

সংজ্ঞা

ঋজুরেখ-ক্ষেত্র (Rectilineal figure)—তোমরা জান দুইটি সরল-রেখা দ্বারা কোন ক্ষেত্র সীমাবদ্ধ হইতে পারে না। তিন বা ততোধিক সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রকে ঋজুরেখ-ক্ষেত্র বলে। যে সকল সরলরেখা দ্বারা ক্ষেত্রটি সীমাবদ্ধ হয় তাহাদিগকে ঐ ক্ষেত্রটির **বাহু** বা **ভুজ (Side)**, বাহুগুলি যে-সকল বিন্দুতে পরস্পর মিলিত হয় সেগুলিকে **কৌণিক বিন্দু (Angular points)** এবং ঐ সকল বিন্দুতে উৎপন্ন কোণগুলিকে ক্ষেত্রটির কোণ বলে। বাহুগুলির সমষ্টি ক্ষেত্রটির **পরিসীমা (Perimeter)** বলে।

ত্রিভুজ (Triangle)

তিনটি সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে ত্রিভুজ বলে। এরূপ ক্ষেত্র অবশ্যই সামতলিক ক্ষেত্র হইবে। ত্রিভুজের তিনটি কৌণিক বিন্দুকে উহার **শীর্ষবিন্দু** বা **শীর্ষ (Vertex)** বলে।



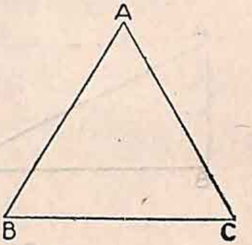
ত্রিভুজের যে-কোন বাহুকে উহার **ভূমি (Base)** ধরিলে উহার বিপরীত কৌণিক বিন্দুকেই শীর্ষ বলা হয় এবং ঐ বিন্দুস্থ কোণটিকে **শিরঃকোণ (Vertical angle)** বলে। ABC ত্রিভুজের BC ভূমি হইলে, উহার বিপরীত A বিন্দু শীর্ষ এবং ∠BAC শিরঃকোণ।

ABC ত্রিভুজের কোণগুলি A, B ও C দ্বারা এবং ইহাদের বিপরীত বাহুগুলি যথাক্রমে a, b ও c দ্বারা সূচিত হয়।

বাহুত্রয়ের দৈর্ঘ্যের সম্বন্ধ অনুসারে ত্রিভুজ তিন প্রকার হইতে পারে—

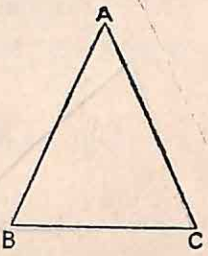
(1) **সমবাহু ত্রিভুজ (Equilateral Triangle)** :—যে ত্রিভুজের তিনটি বাহুই পরস্পর সমান তাহাকে সমবাহু ত্রিভুজ বলে। পার্শ্বস্থ ABC ত্রিভুজে AB = BC = CA

সুতরাং ত্রিভুজটি সমবাহু।



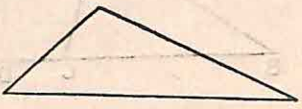
(2) **সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ (Isosceles Triangle)** :—যে ত্রিভুজের দুইটি বাহু পরস্পর সমান তাহাকে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ বলে। পার্শ্বস্থ ABC ত্রিভুজে AB = AC

সুতরাং ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।



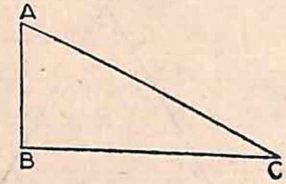
সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহু দুইটি [AB, AC] যে-বিন্দুতে মিলিত হয় [A] তাহাকে সাধারণতঃ ঐ ত্রিভুজের শীর্ষ, শীর্ষবিন্দুর বিপরীত বাহুকে [BC] ভূমি এবং শীর্ষবিন্দুস্থ কোণটিকে [∠A] শিরঃকোণ বলা হয়।

(3) **বিষমবাহু ত্রিভুজ (Scalene Triangle)** :—যে ত্রিভুজের কোন দুইটি বাহু পরস্পর সমান নহে তাহাকে বিষমবাহু ত্রিভুজ বলে।



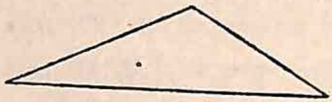
কোণের পরিমাণ-ভেদেও ত্রিভুজ তিন প্রকার হইতে পারে—

(1) **সমকোণী ত্রিভুজ (Right-angled Triangle) :—**

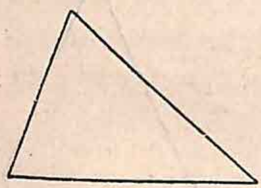


যে ত্রিভুজের একটি কোণ সমকোণ তাহাকে সমকোণী ত্রিভুজ বলে।

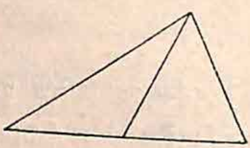
সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণের [B] বিপরীত বাহু [AC]-কে উহার **অতিভুজ (Hypotenuse)** বলে।



(2) **স্থূলকোণী ত্রিভুজ (Obtuse-angled Triangle) :**—যে ত্রিভুজের একটি কোণ স্থূলকোণ তাহাকে স্থূলকোণী ত্রিভুজ বলে।

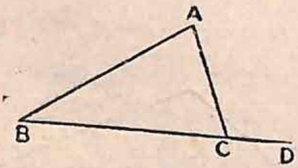


(3) **সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ (Acute-angled Triangle) :**—যে ত্রিভুজের তিনটি কোণই সূক্ষ্মকোণ তাহাকে সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ বলে।



ত্রিভুজের মধ্যমা (Median) :— ত্রিভুজের যে-কোন কৌণিক বিন্দুর সহিত বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাকে উহার মধ্যমা বলে।

ত্রিভুজের কোন বাহু [BC] বর্ধিত হইলে বর্ধিতাংশ অপর বাহুর সহিত যে কোণ [∠ACD] উৎপন্ন করে তাহাকে **বহিঃকোণ (Exterior angle** এবং অপর কোণ দুইটিকে [A ও B কোণ] **বিপরীত অন্তঃকোণ (Interior opposite angles)** বলে।



বহুভুজ (Polygon)

যে সমতল ক্ষেত্র বহু সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ তাহাকে বহুভুজ বলে।

চারিটি ভুজবিশিষ্ট বহুভুজকে **চতুর্ভুজ (Quadrilateral)** বলা হয়।

ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ বহুভুজের পর্যায়ে পড়িলেও সাধারণতঃ ইহাদিগকে বহুভুজ বলা হয় না। চারিটির অধিক সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকেই সাধারণতঃ বহুভুজ আখ্যা দেওয়া হয়।

বাহুর সংখ্যাভেদে বহুভুজ বিভিন্ন নামে অভিহিত হয়। যথা—পাঁচ বাহুবিশিষ্ট বহুভুজকে **পঞ্চভুজ (Pentagon)**, ছয় বাহুবিশিষ্ট বহুভুজকে **ষড়্‌ভুজ (Hexagon)**; এইরূপ **সপ্তভুজ (Heptagon)**, **অষ্টভুজ (Octagon)**, **নবভুজ (Nonagon)**, **দশভুজ (Decagon)** ইত্যাদি।

কোন বহুভুজের কোণগুলি পরস্পর সমান হইলে তাহাকে **সদৃশকোণ (Equiangular)** বহুভুজ বলে।

যে বহুভুজের বাহুগুলি পরস্পর সমান তাহাকে **সমবাহু (Equilateral)** বহুভুজ বলে।

যে বহুভুজের কোণগুলি পরস্পর সমান ও বাহুগুলিও পরস্পর সমান তাহাকে **সুষম (Regular)** বহুভুজ বলে।

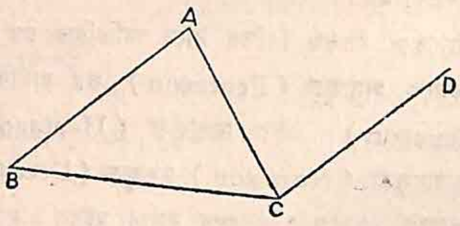
যে বহুভুজের কোন কোণই প্রবৃদ্ধকোণ নহে তাহাকে **প্রবৃদ্ধকোণহীন (Convex)** বহুভুজ বলে।

কর্ণ (Diagonal) :— বহুভুজের যে-কোন দুই কৌণিক বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাকে (বাহু ব্যতীত) কর্ণ বলে।

উপপাদ্য 5

ত্রিভুজের কোণগুলির সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

[The sum of the angles of a triangle is equal to two right angles].



ABC একটি ত্রিভুজ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে ইহার কোণগুলির সমষ্টি দুই সমকোণ, অর্থাৎ

$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB =$ দুই সমকোণ।

মনে কর, C বিন্দু দিয়া BA রেখার সমান্তরাল CD টানা হইয়াছে।

প্রমাণ ঃ যেহেতু BA ও CD সমান্তরাল এবং BC উহাদের সহিত মিলিত হইয়াছে,

$\therefore \angle ABC + \angle BCD =$ দুই সমকোণ

(একই পার্শ্বস্থ অন্তঃকোণদ্বয়ের সমষ্টি)

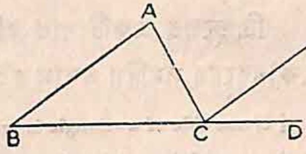
অর্থাৎ $\angle ABC + \angle BCA + \angle ACD =$ দুই সমকোণ

কিন্তু AC সরলরেখা BA ও CD সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়কে ছেদ করায়,

$\angle ACD =$ একান্তর $\angle CAB$

$\therefore \angle ABC + \angle BAC + \angle CAB =$ দুই সমকোণ।

বিকল্প প্রমাণ : BC-কে যে-কোন বিন্দু D পর্যন্ত বর্ধিত কর এবং মনে কর C বিন্দু দিয়া BA রেখার সমান্তরাল CE টানা হইয়াছে।



এখন, CE ও BA সমান্তরাল সরল-রেখাদ্বয়ের সহিত BD মিলিত হওয়ায়,
∠ECD = অনুরূপ ∠ABC

আবার CE ও BA সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের সহিত AC মিলিত হওয়ায়,

∠ACE = একান্তর ∠CAB

∴ সমগ্র ∠ACD = ∠CAB + ∠ABC

উভয় পক্ষে ∠BCA যোগ করিলে,

∠BCA + ∠ACD = ∠BCA + ∠CAB + ∠ABC

কিন্তু BCA, ACD এই সন্নিহিত কোণদ্বয় একত্রে দুই সমকোণের সমান।

∴ ∠ABC + ∠BCA + ∠CAB = দুই সমকোণ।

মন্তব্য : এই প্রমাণ-প্রসঙ্গে প্রমাণিত হইয়াছে যে ∠ACD = ∠CAB + ∠ABC অর্থাৎ বহিঃকোণটি বিপরীত অন্তঃকোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান। ইহাই পরবর্তী প্রতিজ্ঞার প্রতিপাদ্য বিষয়।

অনুসিদ্ধান্ত-1 :—ত্রিভুজের যে-কোন দুই কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

অনু-2 :—ত্রিভুজে একাধিক সমকোণ বা স্থূলকোণ থাকিতে পারে না।

অনু-3 :—ত্রিভুজের দুইটি কোণ অসমান হইলে ক্ষুদ্রতরটি সূক্ষ্মকোণ।

অনু-4 :—প্রত্যেক ত্রিভুজে অন্ততঃপক্ষে দুইটি সূক্ষ্মকোণ থাকিবে।

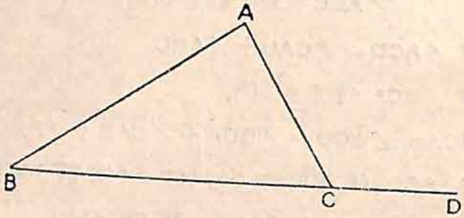
অনু-5 :—সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণ দুইটি পরস্পরের পূরক।

অনু-6 :—দুইটি ত্রিভুজের একটির দুই কোণ অপরটির দুই কোণের সমান হইলে উহাদের তৃতীয় কোণদ্বয়ও সমান হইবে।

উপপাদ্য 6

ত্রিভুজের একটি বাহু বর্ধিত হইলে বহিঃকোণটি বিপরীত অন্তঃকোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান হইবে।

[If one side of a triangle is produced, the exterior angle so formed is equal to the sum of the two interior opposite angles.]



মনে কর ABC ত্রিভুজের BC বাহু D পর্যন্ত বর্ধিত হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে $\angle ACD = \angle CAB + \angle ABC$

প্রমাণ ঃ $\triangle ABC$-এর $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB =$ দুই সমকোণ

আবার, BCD একটি সরলরেখা বলিয়া

$\angle BCA + \angle ACD =$ দুই সমকোণ

$\therefore \quad \angle BCA + \angle ACD = \angle BCA + \angle CAB + \angle ABC$

উভয় পক্ষ হইতে সাধারণ অংশ $\angle BCA$ বাদ দিলে,

$$\angle ACD = \angle CAB + \angle ABC$$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ ত্রিভুজের একটি বাহু বর্ধিত হইলে বহিঃকোণটি যে-কোন বিপরীত অন্তঃকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

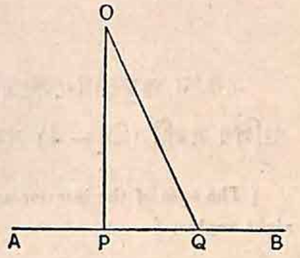
[If one side of a triangle is produced, then the exterior angle is greater than either of the interior opposite angles.]

অনুশীলনী

1. কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণের সমষ্টি তৃতীয় কোণের সমান হইলে প্রমাণ কর যে ত্রিভুজটি সমকোণী হইবে।

2. একটি সরলরেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে ঐ সরলরেখার উপর একটি মাত্র লম্ব টানা যায়।

[AB-এর উপর বহিঃস্থ O বিন্দু হইতে যদি একাধিক লম্ব টানা সম্ভব হয়, তাহা হইলে মনে কর, OP এবং OQ উভয়েই AB-এর উপর লম্ব।



এখন △OPQ-এ ∠OPQ ও ∠OQP প্রত্যেকটিই সমকোণ হওয়ায় ত্রিভুজটির তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর—ইহা অসম্ভব। সুতরাং O হইতে AB-এর উপর একটির অধিক লম্ব টানা যায় না।]

3. প্রমাণ কর যে চতুর্ভুজের কোণগুলির সমষ্টি চারি সমকোণের সমান।

4. প্রমাণ কর যে, স্থূলকোণী ত্রিভুজে স্থূলকোণটি অপর দুই কোণের সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর।

5. একটি সমকোণী ত্রিভুজ ABC-এর সমকৌণিক বিন্দু B হইতে অতিভুজ AC-এর উপর BD লম্ব হইলে, প্রমাণ কর যে △ABC, △ADB ও △BDC-এর যে-কোন একটির কোণগুলি যথাক্রমে অপর যে-কোনটির কোণগুলির সমান।

6. প্রমাণ কর যে, একটি ত্রিভুজের যে-কোন বাহু উভয়দিকে বর্ধিত হইলে উৎপন্ন বহিঃকোণ দুইটির সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

7. প্রমাণ কর যে, কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি একই ক্রমে বর্ধিত হইলে বহিঃকোণগুলির সমষ্টি চারি সমকোণের সমান হইবে।

8. কোন সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে ছেদ করিলে ভেদকের একই পার্শ্বস্থ অন্তঃকোণদ্বয়ের দ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পরের লম্ব হইবে।

উপপাদ্য 7

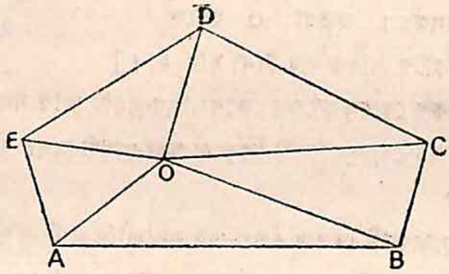
কোন ঋজুরেখ-ক্ষেত্রের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি ঐ ক্ষেত্রের মোট বাহু-সংখ্যার দ্বিগুণসংখ্যক সমকোণ অপেক্ষা চারি সমকোণ কম হইবে।

[All the interior angles of any rectilineal figure are together equal to twice as many right angles as the figure has sides, less four right angles.]

অথবা

কোন ঋজুরেখ-ক্ষেত্রের বাহুসংখ্যা n হইলে, উহার অন্তঃকোণ-গুলির সমষ্টি $(2n-4)$ সমকোণের সমান হইবে।

[The sum of the interior angles of a polygon of n sides is equal to (2n—4) right angles.]



মনে কর ABCDE একটি n বাহুবিশিষ্ট ঋজুরেখ-ক্ষেত্র। (এখানে $n=5$) প্রমাণ করিতে হইবে যে ইহার অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি$=(2n-4)$ সমকোণ।

ক্ষেত্রটির মধ্যে যে-কোন একটি বিন্দু O লও এবং ক্ষেত্রটির প্রত্যেক কৌণিক বিন্দুর সহিত O যুক্ত কর।

প্রমাণ ঃ ক্ষেত্রটির বাহুসংখ্যা n হওয়ায় উহা n-সংখ্যক ত্রিভুজে বিভক্ত হইল।

প্রত্যেকটি ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি $=2$ সমকোণ

সুতরাং n-সংখ্যক ত্রিভুজের সমুদয় কোণের সমষ্টি $=2n$ সমকোণ; কিন্তু ত্রিভুজগুলির সমুদয় কোণের সমষ্টি

$=$ ক্ষেত্রটির অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি $+$ O বিন্দুস্থ কোণ-সমষ্টি।

$\therefore$ ক্ষেত্রটির অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি

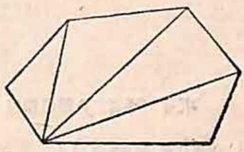
$=[\ 2n$ সমকোণ $]-[$ O বিন্দুস্থ কোণ-সমষ্টি $]$

$=2n$ সমকোণ -4 সমকোণ

$=(2n-4)$ সমকোণ।

বিকল্প প্রমাণ :

ক্ষেত্রটির বাহুসংখ্যা n হইলে কৌণিক বিন্দুর সংখ্যাও n হইবে।



যে-কোন কৌণিক বিন্দুকে অপর $(n-1)$ কৌণিক বিন্দুগুলির সহিত যুক্ত করিলে, যে রেখাগুলি পাওয়া যাইবে তাহাদের মধ্যে দুইটি রেখা ক্ষেত্রের বাহু। অতএব কর্ণের সংখ্যা $(n-1)-2=(n-3)$ হইবে।

সুতরাং ক্ষেত্রটি, $n-3+1=(n-2)$-সংখ্যক ত্রিভুজে বিভক্ত হইবে।

$\therefore$ ক্ষেত্রটির অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি

$=(n-2)$-সংখ্যক ত্রিভুজের কোণ-সমষ্টি

$=(n-2)\times 2$ সমকোণ

$=2n-4$ সমকোণ

অনুসিদ্ধান্ত 1 :—n-বাহুবিশিষ্ট ঋজুরেখ-ক্ষেত্রের

অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি $+4$ সমকোণ $=2n$ সমকোণ।

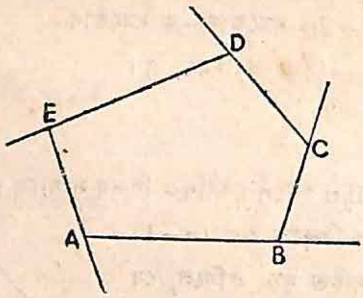
অনু 2 :—n-বাহুবিশিষ্ট সুষম ঋজুরেখ-ক্ষেত্রের

প্রত্যেক অন্তঃকোণের পরিমাণ $=\dfrac{2n-4}{n}$ সমকোণ।

উপপাদ্য ৪

কোনও প্রবৃদ্ধকোণহীন ঋজুরেখ-ক্ষেত্রের বাহুগুলি একই ক্রমে বর্ধিত হইলে বহিঃকোণগুলির সমষ্টি চারি সমকোণের সমান হইবে।

[If the sides of a convex polygon are produced in order, the sum of the exterior angles so formed is equal to four right angles.]



মনে কর ABCDE একটি n-বাহুবিশিষ্ট প্রবৃদ্ধকোণহীন ঋজুরেখ-ক্ষেত্র (এখানে $n=5$)। ইহার বাহুগুলি AB, BC, CD, DE, EA একই ক্রমে বর্ধিত হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

ক্ষেত্রটির বহিঃকোণগুলির সমষ্টি = চারি সমকোণ।

প্রমাণ ঃ ক্ষেত্রটির বাহুসংখ্যা $= n$

স্থতরাং কৌণিক বিন্দুর সংখ্যাও $= n$

প্রত্যেক কৌণিক বিন্দুতে,

অন্তঃকোণ + বহিঃকোণ = 2 সমকোণ,

$\therefore$ n কৌণিক বিন্দুতে,

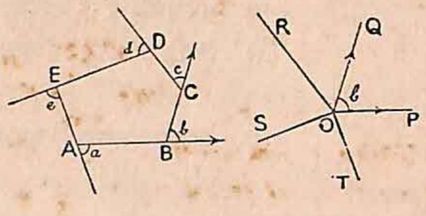
অন্তঃকোণ-সমষ্টি + বহিঃকোণ-সমষ্টি = $2n$ সমকোণ

কিন্তু, অন্তঃকোণ-সমষ্টি + 4 সমকোণ = $2n$ সমকোণ

$\therefore$ বহিঃকোণগুলির সমষ্টি = 4 সমকোণ।

বিকল্প প্রমাণ ঃ

মনে কর, বাহুগুলি বর্ধিত করায় যথাক্রমে b, c, d, e ও a এই বহিঃকোণগুলি উৎপন্ন হইয়াছে।



যে-কোন বিন্দু O লও এবং মনে কর OP, OQ, OR, OS, OT যথাক্রমে AB, BC, CD, DE, EA-এর সমান্তরাল এবং যে যে দিকে বাহুগুলি বর্ধিত হইয়াছে সেই সেই দিগভিমুখী করিয়া টানা হইয়াছে।

তাহা হইলে বহিঃকোণ $b = \angle POQ$

তদ্রূপ c, d, e এবং a এই বহিঃকোণগুলি যথাক্রমে

$\angle QOR$, $\angle ROS$, $\angle SOT$ এবং $\angle TOP$-এর সমান।

$\therefore\ b+c+d+e+a$

$= \angle POQ + \angle QOR + \angle ROS + \angle SOT + \angle TOP$

= চারি সমকোণ।

অর্থাৎ ক্ষেত্রটির বহিঃকোণগুলির সমষ্টি = চারি সমকোণ।

দ্রষ্টব্য ঃ লক্ষ্য করিবে যে **বহিঃকোণগুলির সমষ্টির পরিমাণ বাহুর সংখ্যার উপর নির্ভর করে না।**

অনুসিদ্ধান্ত ঃ n-বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজের প্রত্যেকটি বহিঃকোণের পরিমাণ

$$= \frac{4}{n} \text{ সমকোণ } = \frac{360^\circ}{n}$$

উদাহরণ ঃ (ক) ঋজুরেখ-ক্ষেত্রটি পঞ্চভুজ হইলে, $n=5$

(1) উহার অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি = $[(2\times5)-4]$ সমকোণ
= 6 সমকোণ

(2) বহিঃকোণগুলির সমষ্টি = 4 সমকোণ

(খ) পঞ্চভুজটি সুষম হইলে,

(1) উহার প্রত্যেক বহিঃকোণ $=\frac{4}{5}$ সমকোণ

$=\frac{4}{5}\times 90^\circ=72$

(2) উহার প্রত্যেক অন্তঃকোণ $=180^\circ-72^\circ$

$=108^\circ$

(অথবা) প্রত্যেক অন্তঃকোণ $=\frac{2\times 5-4}{5}$ সমকোণ

$=\frac{6}{5}$ সমকোণ $=108^\circ$

বিবিধ অনুশীলনী (উপপাদ্য ৫-৮ বিষয়ক)

1. ষড়্‌ভুজ, অষ্টভুজ ও দশভুজের—

(*i*) প্রতি ক্ষেত্রে অন্তঃকোণগুলির সমষ্টির পরিমাণ, এবং

(*ii*) ক্ষেত্রগুলি সুষম হইলে প্রতি ক্ষেত্রে প্রত্যেকটি বহিঃকোণ ও অন্তঃকোণের পরিমাণ নির্ণয় কর।

2. সুষম বহুভুজের একটি বহিঃকোণ (*i*) 40°, (*ii*) 24°, (*iii*) $13^\circ 20'$ হইলে প্রতি ক্ষেত্রে উহার বাহুসংখ্যা নির্ণয় কর।

3. সুষম বহুভুজের একটি অন্তঃকোণের পরিমাণ (*i*) 135°, (*ii*) 150°, (*iii*) 162° হইলে, প্রতি ক্ষেত্রে বাহুসংখ্যা নির্ণয় কর।

4. প্রবৃদ্ধকোণহীন কোন ঋজুরেখ-ক্ষেত্রের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি বহিঃকোণগুলির সমষ্টির সমান। প্রমাণ কর ক্ষেত্রটি একটি চতুর্ভুজ।

5. কোন সুষম বহুভুজের একটি অন্তঃকোণ একটি বহিঃকোণের আটগুণ হইলে, উহার বাহুসংখ্যা কত ?

6. কোন সুষম বহুভুজের একটি বহিঃকোণ একটি অন্তঃকোণের দ্বিগুণ, উহার বাহুসংখ্যা কত ?

7. কোন ঋজুরেখ-ক্ষেত্রের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি উহার বহিঃকোণগুলির সমষ্টির তিনগুণ হইলে, ক্ষেত্রটির বাহুসংখ্যা নির্ণয় কর।

8. ত্রিভুজের শীর্ষ দিয়া ভূমির সমান্তরাল একটি সরলরেখা টানিয়া প্রমাণ কর যে ত্রিভুজের কোণগুলির সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

9. ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর সহিত ভূমির যে-কোন বিন্দু যুক্ত করিয়া প্রমাণ কর যে ত্রিভুজের কোণগুলির সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

10. ABC ত্রিভুজের মধ্যে O যে-কোন বিন্দু। প্রমাণ কর যে $\angle BOC$, $\angle BAC$ অপেক্ষা বৃহত্তর।

11. ABC ত্রিভুজের B ও C কোণের দ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ কর, $\angle BOC = 90^\circ + \frac{A}{2}$।

12. ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুদ্বয় বর্ধিত হওয়ায় যে বহিঃকোণ দুইটি উৎপন্ন হইয়াছে তাহাদের দ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ কর যে, $\angle BOC = 90^\circ - \frac{A}{2}$।

13. ত্রিভুজের ভূমির যে-কোন একটি কোণের দ্বিখণ্ডকের ও ভূমিস্থ অপর কোণটির বহির্দ্বিখণ্ডকের অন্তর্ভূত কোণ, ত্রিভুজের শিরঃকোণের অর্ধেক।

[The angle between the internal bisector of one of the base angles of a triangle and the external bisector of the other base angle is equal to half the angle at the vertex.]

14 কোন চতুর্ভুজের যে-কোন বাহুসংলগ্ন কোণদ্বয়ের দ্বিখণ্ডকদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণটি চতুর্ভুজের অপর দুই কোণের সমষ্টির অর্ধাংশ।

15. ত্রিভুজের শিরঃকোণ হইতে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের ও শিরঃকোণের দ্বিখণ্ডকের অন্তর্ভূত কোণ, ত্রিভুজের ভূমি-সংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তরের অর্ধেকের সমান।

[The angle between the bisector of the vertical angle and the perpendicular from the vertex to the base of a triangle is half the difference of the angles at the base.]

16. দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিলে, ছেদবিন্দুতে উৎপন্ন সূক্ষ্মকোণটি ঐ দুই রেখার লম্বদ্বয়ের অন্তর্ভূত সূক্ষ্মকোণটির সমান হইবে।

ত্রিভুজের সর্বসমতা

(Congruence of Triangles)

প্রত্যেক ত্রিভুজের তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ আছে—ইহাদিগকে ত্রিভুজের **অঙ্গ** (**Parts**) বলে।

দুইটি ত্রিভুজের একটিকে অপরটির উপর স্থাপন করিলে, তাহারা যদি সম্পূর্ণরূপে মিলিয়া যায়, অর্থাৎ উপরিপাত প্রক্রিয়া দ্বারা একটিকে অপরটির উপর সমাপতিত করা যায়, তাহা হইলে ত্রিভুজ দুইটিকে **সর্বসম** (**Congruent**) বা **সর্বতোভাবে সমান** (**Equal in all respects** কিংবা **identically equal**) বলা হয়। এরূপ ক্ষেত্রে একটির যে-অঙ্গ অপরটির যে-অঙ্গের উপর সমাপতিত হয় তাহারা পরস্পর সমান বলিয়া একটি ত্রিভুজের ছয়টি অঙ্গই যথাক্রমে অপরটির ছয়টি অঙ্গের সহিত সমান হইবে এবং স্পষ্টতঃ ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফলও সমান হইবে।

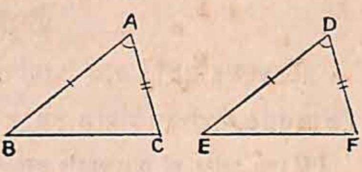
এরূপ দুইটি ত্রিভুজের যে যে কোণ পরস্পর সমান—তাহাদের বিপরীত বাহুদ্বয়কে **অনুরূপ বাহু** (**Corresponding sides**) এবং যে যে বাহু পরস্পর সমান তাহাদের বিপরীত কোণদ্বয়কে **অনুরূপ কোণ** (**Corresponding angles**) বলে।

ত্রিভুজের সর্বসমতা-বিষয়ক স্বতঃসিদ্ধ

স্বতঃসিদ্ধ (1) ঃ দুইটি ত্রিভুজে একটির দুই বাহু ও অন্তর্ভূত কোণ যথাক্রমে অপরটির দুই বাহু ও অন্তর্ভূত কোণের সমান হইলে ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হইবে।

[If two triangles have two sides of the one equal to two sides of the other, each to each, and also the angles contained by those sides equal, the triangles are congruent.]

ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয়ে, AB = DE, AC = DF এবং ∠A = ∠D হইলে, ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হইবে।

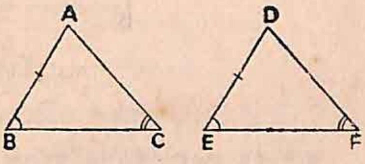


তোমরা ইতঃপূর্বেই পরীক্ষা করিয়া দেখিয়াছ যে এরূপ ক্ষেত্রে একটি ত্রিভুজকে অপরটির উপর স্থাপন করিলে ইহারা সর্বাংশে মিলিয়া যায়, অর্থাৎ উপরিপাত প্রক্রিয়ায় একটি অপরটির উপর সমাপতিত হইতে পারে। সুতরাং ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

স্বতঃসিদ্ধ (2) ঃ দুইটি ত্রিভুজে একটির দুই কোণ ও যে-কোন একটি বাহু যথাক্রমে অপরটির দুই কোণ ও অনুরূপ বাহুর সমান হইলে ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হইবে।

[If two triangles have two angles of the one equal to two angles of the other, each to each, and also one side of the one equal to the corresponding side of the other, the triangles are congruent.]

ABC, DEF ত্রিভুজদ্বয়ে ∠B = ∠E, ∠C = ∠F এবং বাহু AB = অনুরূপ বাহু DE হইলে, ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হইবে।



প্রদত্ত সর্ত হইতে স্পষ্টই বুঝা যায় যে ত্রিভুজদ্বয়ের অবশিষ্ট কোণদ্বয়ও সমান হইবে, অর্থাৎ ∠A = ∠D হইবে। এক্ষেত্রেও তোমরা পরীক্ষা দ্বারা জানিয়াছ যে উপরিপাত প্রক্রিয়ায় ত্রিভুজদ্বয়ের যে কোনটি অপরটির উপর সমাপতিত হইতে পারে। সুতরাং ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

মন্তব্য ঃ উভয় ক্ষেত্রেই ত্রিভুজ দুইটির তিনটি অঙ্গের সমতা দেওয়া আছে এবং ইহা হইতে ত্রিভুজদ্বয়ের সর্বসমতা সম্বন্ধে নিঃসন্দেহ হওয়ায় আমরা অবশিষ্ট তিনটি অঙ্গের সমতা বিষয়ে সিদ্ধান্ত করিতে পারি—

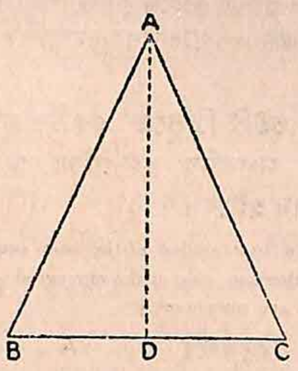
স্বতঃ 1 ঃ—প্রদত্ত ঃ AB = DE, AC = DF এবং ∠A = ∠D
সিদ্ধান্ত ঃ BC = EF, ∠B = ∠E, ∠C = ∠F

স্বতঃ 2 ঃ—প্রদত্ত ঃ ∠B = ∠E, ∠C = ∠F এবং AB = DE
সিদ্ধান্ত ঃ ∠A = ∠D, AC = DF, BC = EF

উপপাদ্য 9

ত্রিভুজের দুইটি বাহু পরস্পর সমান হইলে উহাদের বিপরীত কোণদ্বয়ও পরস্পর সমান হইবে।

[If two sides of a triangle are equal, the angles opposite to them are also equal.]



ABC ত্রিভুজে, AC = AB

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle ABC = \angle ACB$

মনে কর, BAC কোণের দ্বিখণ্ডক AD, BC বাহুর সহিত D বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে।

প্রমাণ : BAD, CAD ত্রিভুজদ্বয়ে

যেহেতু AB = AC (কল্পনা), AD উভয় ত্রিভুজের সাধারণ বাহু

এবং অন্তর্ভূত $\angle BAD$ = অন্তর্ভূত $\angle CAD$ (অঙ্কন)

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। (স্বতঃসিদ্ধ)

সুতরাং $\angle ABD = \angle ACD$ অর্থাৎ $\angle ABC = \angle ACB$

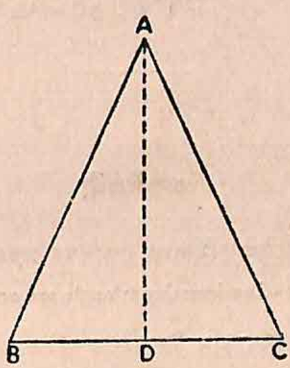
অনুসিদ্ধান্ত-1 : সমবাহু ত্রিভুজের তিনটি কোণই পরস্পর সমান এবং প্রত্যেকটি কোণ = $\frac{1}{3} \times 2$ সমকোণ = 60°।

অনু-2 : সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শিরঃকোণের দ্বিখণ্ডক ভূমির উপর লম্ব এবং উহা ভূমিকে দ্বিখণ্ডিত করে। [BAD ও CAD ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হওয়ায় ইহা সুস্পষ্ট।]

উপপাদ্য 10

ত্রিভুজের দুইটি কোণ পরস্পর সমান হইলে উহাদের বিপরীত বাহুদ্বয়ও পরস্পর সমান হইবে।

[If two angles of a triangle are equal, the sides opposite to these equal angles are also equal.]



ABC ত্রিভুজে, $\angle ABC = \angle ACB$ ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $AC = AB$ ।

মনে কর, BAC কোণের দ্বিখণ্ডক AD, BC বাহুর সহিত D বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে।

প্রমাণ : ABD, ACD ত্রিভুজদ্বয়ে,

যেহেতু, $\angle ABD = \angle ACD$ (কল্পনা)

$\angle BAD = \angle CAD$ (অঙ্কন)

এবং AD উভয় ত্রিভুজের সাধারণ বাহু

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। (স্বতঃসিদ্ধ)

অতএব $AC = AB$.

অনুসিদ্ধান্ত ঃ—ত্রিভুজের তিনটি কোণই পরস্পর সমান (অর্থাৎ প্রত্যেকটি কোণের পরিমাণ 60°) হইলে ত্রিভুজটি সমবাহু হইবে।

মন্তব্য ঃ এই উপপাদ্যটি, উপপাদ্য 9-এর বিপরীত ; কেননা—

উপপাদ্য 9-এ, কল্পনা ঃ ABC ত্রিভুজে, AC = AB

সিদ্ধান্ত ঃ ∠ABC = ∠ACB

উপপাদ্য 10-এ, কল্পনা ঃ ABC ত্রিভুজে, ∠ABC = ∠ACB

সিদ্ধান্ত ঃ AC = AB

অনুশীলনী

1. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয় সূক্ষ্মকোণ।
[Angles at the base of an isosceles triangle are acute.]

2. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি উভয়দিকে বর্ধিত করিলে উৎপন্ন বহিঃকোণদ্বয় পরস্পর সমান হইবে।

বিপরীতক্রমে, কোন ত্রিভুজের ভূমি উভয়দিকে বর্ধিত করিলে উৎপন্ন বহিঃকোণদ্বয় যদি পরস্পর সমান হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

3. কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমির উপর লম্ব যদি ভূমিকে দ্বিখণ্ডিত করে তাহা হইলে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে।

4. ABC ত্রিভুজে D, AC-এর মধ্যবিন্দু ; BD যুক্ত করিয়া উহাকে E পর্যন্ত এরূপভাবে বর্ধিত করা হইল যে DE = BD ; প্রমাণ কর CE এবং AB সমান ও সমান্তরাল।

5. ABC ত্রিভুজে AB = AC ; AD, BC-এর উপর লম্ব ; AD-কে E পর্যন্ত এরূপভাবে বর্ধিত করা হইল যে DE = AD। প্রমাণ কর CE ও AB সমান ও সমান্তরাল।

6. কোন ত্রিভুজের শিরঃকোণের দ্বিখণ্ডক যদি ভূমিকে দ্বিখণ্ডিত করে তাহা হইলে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে।

[If the bisector of the vertical angle of a triangle bisects the base, then the triangle is isosceles.]

7. ABC ত্রিভুজে AB=AC ; O শিরঃকোণের দ্বিখণ্ডকের উপর যে-কোন বিন্দু হইলে, প্রমাণ কর OB=OC.

8. ABC ত্রিভুজে AB=AC ; BD, CE যথাক্রমে AC ও AB-এর উপর লম্ব। প্রমাণ কর (*i*) BD=CE এবং (*ii*) AE=AD.

9. প্রমাণ কর যে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়ের দ্বিখণ্ডকের অংশ দুইটি পরস্পর সমান।

[Prove that the bisectors of the angles at the base of an isosceles triangle terminated by the equal sides are equal to one another.]

10. প্রমাণ কর যে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহু দুইটির উপর অঙ্কিত মধ্যমাদ্বয় পরস্পর সমান।

[Prove that the medians corresponding to the two equal sides of an isosceles triangle are equal to one another.]

11. প্রমাণ কর যে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু যুক্ত করিলে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হইবে উহাও একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ হইবে।

12. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক কৌণিক বিন্দু দিয়া বিপরীত বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা টানিলে একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়।

13. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শিরঃকোণের বহির্দ্বিখণ্ডক ভূমির সমান্তরাল।

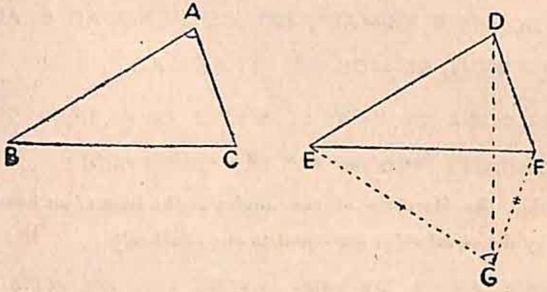
বিপরীতক্রমে, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু দিয়া ভূমির সমান্তরাল সরলরেখা শিরঃকোণের বহির্দ্বিখণ্ডক।

14. ABC ত্রিভুজে AB=AC ; D ও E যথাক্রমে AB ও AC-এর মধ্যবিন্দু ; প্রমাণ কর DE ও BC সমান্তরাল।

উপপাদ্য 11

দুইটি ত্রিভুজে একটির তিন বাহু যথাক্রমে অপরটির তিন বাহুর সমান হইলে ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হইবে।

[If two triangles have the three sides of the one equal to the three sides of the other, each to each, the triangles are congruent.]



মনে কর, ABC ও DEF এই দুই ত্রিভুজে

AB = DE, AC = DF এবং BC = EF।

প্রমাণ করিতে হইবে যে ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

প্রমাণঃ △ABC-কে △DEF-এর উপর এরূপভাবে স্থাপন কর যেন BC বাহু তাহার সমান EF বাহুর উপর সমাপতিত হয় এবং A বিন্দু EF-এর যে পার্শ্বে D অবস্থিত তাহার বিপরীত পার্শ্বে পড়ে।

△ABC-এর এই নূতন অবস্থানে A বিন্দুর নাম G দেওয়া হইল।

তাহা হইলে GE = AB, GF = AC এবং ∠EGF = ∠BAC

DG যুক্ত কর।

এখন, GED ত্রিভুজে GE = DE (কারণ উভয়েই AB-এর সমান)

∴ ∠EDG = ∠EGD

আবার GFD ত্রিভুজে GF = DF (কারণ উভয়েই AC-এর সমান)

∴ ∠FDG = ∠FGD

অতএব সমগ্র $\angle EDF =$ সমগ্র $\angle EGF$

অর্থাৎ $\angle EDF = BAC$

এখন ABC, DEF ত্রিভুজদ্বয়ে,

যেহেতু $AB = DE$

$AC = DF$

এবং অন্তর্ভূত $\angle BAC =$ অন্তর্ভূত $\angle EDF$

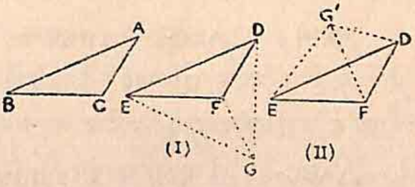
$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

মন্তব্য : (1) এখানে ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম প্রমাণিত হওয়ায় সিদ্ধান্ত হইল যে,

$$\angle A = \angle D, \ \angle B = \angle E, \ \angle C = \angle F$$

অর্থাৎ সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান এবং ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফল সমান।

(2) চিত্রে DG, EF-কে ছেদ করিয়াছে ; কিন্তু ত্রিভুজ দুইটি এরূপ হইতে পারে যে DG, EF-কে আদৌ ছেদ করিবে না বা EF-এর প্রান্তবিন্দু F দিয়া যাইবে। এরূপ ক্ষেত্রেও অনুরূপ যুক্তি প্রয়োগে এই উপপাদ্য প্রমাণিত হইবে।

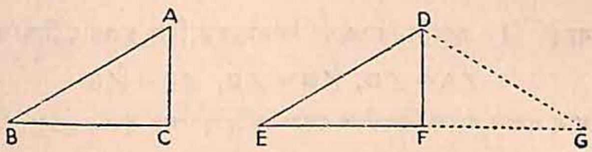


লক্ষ্য করিবে যে ত্রিভুজ দুইটির বৃহত্তম বাহুদ্বয় উপর্যুপরি স্থাপন করিলে এরূপ কোন অবস্থার উদ্ভব হইবে না। পার্শ্বস্থ চিত্র [(I)]-এ BC-কে EF-এর উপর স্থাপন করায় DG, EF-কে ছেদ করিল না। এ ক্ষেত্রে বৃহত্তর বাহু AB-কে DE-এর উপর স্থাপন করিয়া যে চিত্র [(II)] পাওয়া গেল তাহাতে FG, DE-কে ছেদ করিয়াছে।

উপপাদ্য 12

দুইটি সমকোণী ত্রিভুজে একটির অতিভুজ ও অপর কোন বাহু যথাক্রমে অন্যটির অতিভুজ ও এক বাহুর সমান হইলে ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হইবে।

[Two right-angled traingles which have their hypotenuses equal, and one side of the one equal to one side of the other, are congruent.]



মনে কর ABC ও DEF এই দুই সমকোণী ত্রিভুজে

$\angle ACB$ ও $\angle DFE$ সমকোণ,

অতিভুজ AB = অতিভুজ DE

এবং AC = DF

প্রমাণ করিতে হইবে যে ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

প্রমাণ ঃ $\triangle ABC$-কে $\triangle DEF$-এর উপর এরূপভাবে স্থাপন কর যেন AC বাহু তাহার সমান DF বাহুর উপর সমাপতিত হয় এবং B বিন্দুটি DF-এর যে পার্শ্বে E অবস্থিত তাহার বিপরীত পার্শ্বে পড়ে।

$\triangle ABC$-এর এই নূতন অবস্থানে B বিন্দুর নাম G দেওয়া হইল।

তাহা হইলে DG = AB, $\angle DFG = \angle ACB$, $\angle DGF = \angle ABC$

যেহেতু DFE ও DFG এই সন্নিহিত কোণ দুইটি প্রত্যেকে এক সমকোণ,

$\therefore$ FE ও FG একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

তাহা হইলে DEG ত্রিভুজে,

যেহেতু DG = DE (কারণ উভয়েই AB-এর সমান)

$\therefore$ $\angle DEG = \angle DGE$

অর্থাৎ $\angle DEF = \angle ABC$

এখন ABC, DEF ত্রিভুজদ্বয়ে

$\angle ACB = \angle DFE$ (প্রত্যেকে এক সমকোণ)

$\angle ABC = \angle DEF$ (প্রমাণিত)

এবং বাহু AC = বাহু DF

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

অনুশীলনী

1. একই ভূমির উপর অঙ্কিত (একই পার্শ্বে বা বিপরীত পার্শ্বে) দুইটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা শিরঃকোণ দুইটিকে দ্বিখণ্ডিত করিবে।

2. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু ও ভূমির মধ্যবিন্দু যুক্ত করিলে ঐ মধ্যমা শিরঃকোণের দ্বিখণ্ডক ও ভূমির উপর লম্ব হইবে।

3. ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ ; উহার ভূমিসংলগ্ন কোণ $\angle B$ ও $\angle C$-এর দ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ কর AO শিরঃকোণকে দ্বিখণ্ডিত করিবে।

4. কোনও চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান হইলে বিপরীত কোণগুলিও পরস্পর সমান হইবে।

5. প্রমাণ কর যে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমির উপর লম্ব, শিরঃকোণ ও ভূমি উভয়েরই দ্বিখণ্ডক।

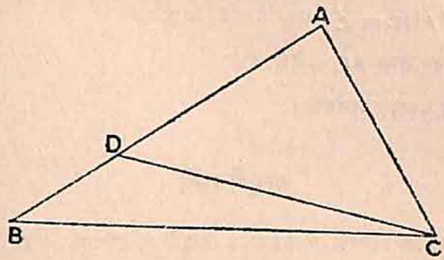
6. ABC একটি ত্রিভুজ এবং O ঐ ত্রিভুজের বাহুগুলি হইতে সমদূরবর্তী একটি বিন্দু। প্রমাণ কর O ঐ ত্রিভুজের যে-কোন কোণের দ্বিখণ্ডক রেখার উপর অবস্থিত।

7. O বিন্দুটি ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি হইতে সমদূরবর্তী। প্রমাণ কর যে O হইতে যে-কোন বাহুর উপর লম্ব ঐ বাহুকে দ্বিখণ্ডিত করিবে।

উপপাদ্য 13

ত্রিভুজের কোন তুই বাহু অসমান হইলে, বৃহত্তর বাহুর বিপরীত কোণ ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

[If two sides of a triangle are unequal, the angle opposite to the greater side is greater than the angle opposite to the less.]



মনে কর, ABC ত্রিভুজের AB বাহু AC বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে $\angle ACB$, $\angle ABC$ অপেক্ষা বৃহত্তর।

AB হইতে AC-এর সমান করিয়া AD অংশ কাটিয়া লও। DC যুক্ত কর।

প্রমাণ ঃ যেহেতু ADC ত্রিভুজে, $AC = AD$

$\therefore \angle ADC = \angle ACD$

কিন্তু $\triangle BDC$-এর বহিঃকোণ $ADC >$ বিপরীত অন্তঃকোণ DBC

$\therefore \angle ACD > \angle DBC$

অর্থাৎ $\angle ACD > \angle ABC$

অতএব, $\angle ACB$ (যাহা $\angle ACD$ অপেক্ষাও বড়) অবশ্যই $\angle ABC$ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ বিষমবাহু ত্রিভুজের কোণগুলি পরস্পর অসমান।

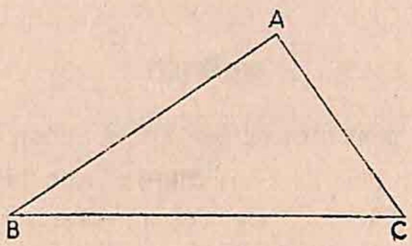
মন্তব্য ঃ ABC ত্রিভুজে, $AB >, =$ বা $< AC$ হইলে

$\angle C >, =$ বা $< \angle B$ হইবে।

উপপাদ্য 14

ত্রিভুজের দুই কোণ অসমান হইলে, বৃহত্তর কোণের বিপরীত বাহু ক্ষুদ্রতর কোণের বিপরীত বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

[If two angles of a triangle are unequal, then the side opposite to the greater angle is greater than the side opposite to the less.]



মনে কর, ABC ত্রিভুজের ∠ACB, ∠ABC অপেক্ষা বৃহত্তর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে AB বাহু AC বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

প্রমাণঃ যদি AB, AC অপেক্ষা বৃহত্তর না হয়,

তাহা হইলে (1) AB = AC

অথবা (2) AB < AC হইবে।

(1) AB = AC হইলে, ∠ACB = ∠ABC, কিন্তু ইহা কল্পনাবিরুদ্ধ। সুতরাং AB, AC-এর সমান নয়।

(2) AB < AC হইলে, ACB কোণ < ABC কোণ, ইহাও কল্পনাবিরুদ্ধ। সুতরাং AB, AC অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর নয়।

অতএব, AB, AC-এর সমান বা AC অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর না হওয়ায় অবশ্যই AC অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ ত্রিভুজের কোণগুলি অসমান হইলে উহার বাহুগুলিও অসমান হইবে।

মন্তব্য ঃ এই উপপাদ্যটি পূর্ববর্তী উপপাদ্যের বিপরীত ;

কেননা—উপপাদ্য 13-এ, কল্পনা ABC ত্রিভুজে, AB>AC

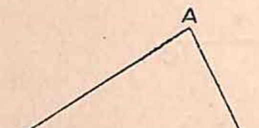
সিদ্ধান্ত ∠ACB>∠ABC.

উপপাদ্য 14-এ, কল্পনা ABC ত্রিভুজে, ∠ACB>∠ABC

সিদ্ধান্ত AB>AC.

অনুশীলনী

1. ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহুসংলগ্ন উভয় কোণই সূক্ষ্মকোণ।



[**প্রমাণ ঃ** ABC ত্রিভুজে BC বৃহত্তম বাহু হইলে স্পষ্টতঃ ∠A>∠B এবং ∠A>∠C : এখন, ∠B অথবা ∠C-এর যে-কোনটি, মনে কর ∠B, সমকোণ বা স্থূলকোণ হইলে ∠A+∠B> দুই সমকোণ। কিন্তু ইহা অসম্ভব—কারণ, ত্রিভুজের যে-কোন দুই কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ; সুতরাং ∠B এবং ∠C সূক্ষ্মকোণ হইবে।]

2. ত্রিভুজের বৃহত্তর বাহুর বিপরীত কোণ ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর—এই উপপাদ্যটি ক্ষুদ্রতর বাহু বর্ধিত করিয়া প্রমাণ কর।

3. সমকোণী ত্রিভুজে অতিভুজই বৃহত্তম বাহু এবং স্থূলকোণী ত্রিভুজে স্থূলকোণের বিপরীত বাহুই বৃহত্তম।

[In a right-angled triangle the hypotenuse is the greatest side and in an obtuse-angled triangle the side opposite to the obtuse angle is the greatest side.]

4. ABC ত্রিভুজে ∠B সমকোণ এবং BD, AC-এর উপর লম্ব। BC>AB হইলে প্রমাণ কর CD>AD।

5. ABC ত্রিভুজকে AB>AC, AB-এর উপর যে-কোন বিন্দু D হইতে BC-এর সমান্তরাল সরলরেখা AC-কে E বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর AD>AE.

6. ABC ত্রিভুজে A ও C বিন্দু হইতে AD ও CD যথাক্রমে BC ও BA-এর সমান্তরাল টানা হইল। BC>BA হইলে, প্রমাণ কর AD>CD.

7. ABCD একটি চতুর্ভুজ। AD ইহার বৃহত্তম ও BC ক্ষুদ্রতম বাহু হইলে, প্রমাণ কর ∠BCD>∠BAD.

8. ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। ইহার ভূমি BC-এর উপর D যে-কোন বিন্দু। প্রমাণ কর AD, AB বা AC অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

D যদি BC-এর বর্ধিতাংশের উপর যে-কোন বিন্দু হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর AD বাহু AB (বা AC) অপেক্ষা বৃহত্তর।

9. ABC ত্রিভুজে AB>AC ; BA-কে D পর্যন্ত এরূপে বর্ধিত করা হইল যেন AD=AC হয় ; DC যুক্ত হইল। প্রমাণ কর ∠BCD একটি স্থূলকোণ।

10. ABC ত্রিভুজে AB>AC ; ∠B ও ∠C-এর অন্তর্দ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে এবং বহির্দ্বিখণ্ডকদ্বয় O′ বিন্দুতে মিলিত হইলে প্রমাণ কর

(1) OB>OC ; (2) O′B<O′C

11. ABC ত্রিভুজে AD মধ্যমা ; AB>AC হইলে, প্রমাণ কর

∠CAD>∠BAD.

[**সংকেত :** AD-কে E পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন DE=AD হয় ; EC যুক্ত কর।]

12. ABC ত্রিভুজে AD একটি মধ্যমা ; প্রমাণ কর

BC>, =বা <2AD হইলে

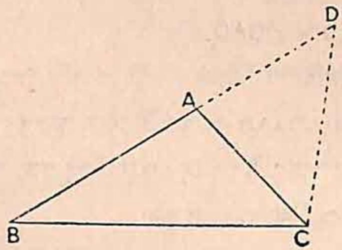
∠BAC যথাক্রমে স্থূলকোণ, সমকোণ বা সূক্ষ্মকোণ হইবে।

13. ABC ত্রিভুজের A কোণের দ্বিখণ্ডক BC-এর সহিত D বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে ; AB>AC হইলে, প্রমাণ কর BD>DC.

উপপাদ্য 15

ত্রিভুজের যে-কোন দুই বাহু একত্রযোগে তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

[Any two sides of a triangle are together greater than the third side.]



ABC একটি ত্রিভুজ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে ইহার যে-কোন দুইটি বাহুর, ধর AB এবং AC-এর, সমষ্টি তৃতীয় বাহু BC অপেক্ষা বৃহত্তর।

BC যদি AB কিংবা AC বাহুর সমান বা তদপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয় তবে স্পষ্টতঃই উহা AB, AC-এর সমষ্টি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে। কিন্তু BC, ত্রিভুজের বৃহত্তর বাহু হইলে BA ও AC একত্রযোগে উহা অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ইহা প্রমাণ করিতে হইবে।

BA-কে D পর্যন্ত এরূপভাবে বর্ধিত কর যেন $AD=AC$ হয়; DC যুক্ত কর।

প্রমাণ: ADC ত্রিভুজে, $AD=AC$ বলিয়া $\angle ACD=\angle ADC$

কিন্তু $\angle BCD>\angle ACD$, সুতরাং $\angle BCD>\angle ADC$

অর্থাৎ BDC ত্রিভুজে, $\angle BCD>\angle BDC$

$\therefore BD>BC$

কিন্তু $BD=BA+AD=BA+AC$

অতএব, BA ও AC একত্রযোগে BC অপেক্ষা বৃহত্তর।

মন্তব্য ঃ কোন কোন গণিতজ্ঞ পণ্ডিত সরলরেখার এইরূপ সংজ্ঞা দিয়াছেন যে ইহা দুইটি বিন্দুর মধ্যে ন্যূনতম দূরত্ব। এই সংজ্ঞা গ্রহণ করিলে এই উপপাদ্য প্রমাণ করিতে আর কোন যুক্তির প্রয়োজন হয় না।

অনুশীলনী

1. ত্রিভুজের যে-কোন দুই বাহুর অন্তর তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

[The difference of any two sides of a triangle is less than the third side.]

বস্তুতঃ ইহা উপ. 15-এর অনুসিদ্ধান্ত

$BC + CA > AB$

$\therefore\ AB < BC + CA$

$\therefore\ AB - CA < BC + CA - CA$

$\therefore\ AB - AC < BC$

নিম্নে স্বতন্ত্র প্রমাণ দেখ :—

ABC ত্রিভুজে $AB > AC$; প্রমাণ করিতে হইবে $AB - AC < BC$. AB হইতে AC-এর সমান করিয়া AD অংশ কাটিয়া লও ; DC যুক্ত কর।

প্রমাণ ঃ

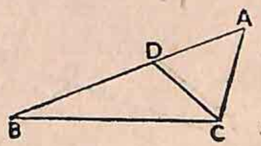
$AD = AC\ \ \therefore\ \angle ACD = \angle ADC$

কিন্তু বহিঃ $\angle BDC >$ বিপরীত অন্তঃ $\angle ACD$

$\therefore\ \angle BDC > \angle ADC$

আবার বহিঃ $\angle ADC >$ বিপরীত অন্তঃ $\angle BCD$

$\therefore\ \angle BDC > \angle BCD$



অতএব BDC ত্রিভুজে, $BC > BD$

কিন্তু $BD = AB - AD = AB - AC$

$\therefore\ BC > AB - AC$

অর্থাৎ $AB - AC < BC$

অথবা ঃ

$$BC+AC>AB$$

অর্থাৎ $BC+AC>AD+BD$

কিন্তু $AC=AD$

$\therefore\ BC>BD$

কিন্তু $BD=AB-AD$

$=AB-AC$

$\therefore\ BC>AB-AC$

অর্থাৎ $AB-AC<BC$

2. ABC ত্রিভুজের A কোণের দ্বিখণ্ডক রেখা টানিয়া প্রমাণ কর

$$BA+AC>BC.$$

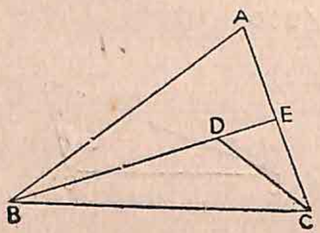
3. চতুর্ভুজের যে-কোন তিন বাহুর সমষ্টি চতুর্থ বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

4. চতুর্ভুজের পরিসীমা উহার কর্ণদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর।

5. ABC ত্রিভুজে D ও E যথাক্রমে AB ও AC-এর মধ্যবিন্দু; প্রমাণ কর, $AB+AC>2DE$.

6. ABC ত্রিভুজে D ও E যথাক্রমে AB ও AC-এর উপর যে-কোন দুইটি বিন্দু; প্রমাণ কর ABC ত্রিভুজের পরিসীমা BCED চতুর্ভুজের পরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর।

7. ABC ত্রিভুজের মধ্যে অবস্থিত D যে-কোন বিন্দু। প্রমাণ কর $\triangle ABC$-এর পরিসীমা $\triangle DBC$-এর পরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর।



[**প্রমাণ ঃ** BD-কে বর্ধিত করিয়া AC-এর সহিত E বিন্দুতে মিলিত কর। $BA+AE>BE$; উভয়পক্ষে EC যোগ করিলে, $BA+AC>BE+EC \cdots (1)$

আবার, $DE+EC>DC$

উভয়পক্ষে BD যোগ করিলে,

$BE+EC > BD+DC$ ....(2)

(1) এবং (2) হইতে, $BA+AC > BD+DC$

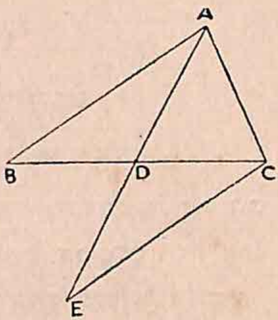
$\therefore$ $BA+AC+CB > BD+DC+CB$]

8. ত্রিভুজের মধ্যস্থিত কোন বিন্দুর সহিত কৌণিক বিন্দুত্রয়ের সংযোজক সরলরেখাগুলির সমষ্টি ত্রিভুজের পরিসীমা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

9. ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুত্রয় হইতে ত্রিভুজের মধ্যস্থিত কোন বিন্দুর দূরত্বের সমষ্টি অর্ধ-পরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর।

10. ত্রিভুজের পরিসীমা উহার মধ্যমাত্রয়ের সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর।

[The perimeter of a triangle is greater than the sum of the medians.]



[**সংকেত :** ABC ত্রিভুজের AD একটি মধ্যমা।

AD-কে E পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন $DE=AD$ হয়, EC যুক্ত করিয়া প্রমাণ কর $AB+AC > 2AD$]

11. ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের সমষ্টি উহার অর্ধ-পরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর।

[The sum of the medians of a triangle is greater than its semi-perimeter.]

12. ABCD একটি চতুর্ভুজ; উহার কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যুক্ত করিয়া যে সরলরেখা পাওয়া যায় তাহার মধ্যবিন্দু O; প্রমাণ কর—

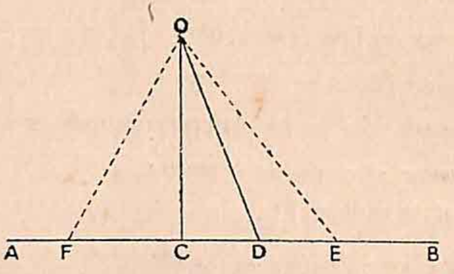
(চতুর্ভুজের পরিসীমা + কর্ণদ্বয়ের সমষ্টি) $> 2(OA+OB+OC+OD)$

13. AB সরলরেখার উপর O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। C ও D দুইটি বিন্দু AB রেখার একই পার্শ্বে এরূপে অবস্থিত যে $\angle COA = \angle DOB$; AB-এর উপর অপর যে-কোন বিন্দু P লইয়া প্রমাণ কর $CO+OD<CP+PD$.

উপপাদ্য 16

কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার বহিঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে ঐ রেখা পর্যন্ত যে-সকল সরলরেখা টানা যায় তন্মধ্যে লম্বই ক্ষুদ্রতম।

[Of all straight lines that can be drawn to a given straight line from a given point outside it, the perpendicular is the short est.]



মনে কর, AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং O বহিঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু। OC, AB-এর উপর লম্ব এবং OD, O হইতে AB পর্যন্ত অন্য যে সকল সরলরেখা টানা যায় (OD, OE, OF···ইত্যাদি) তন্মধ্যে যে-কোন একটি।

প্রমাণ করিতে হইবে যে OC রেখা OD বা অনুরূপ যে-কোন রেখা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

প্রমাণঃ OCD ত্রিভুজে $\angle OCD$ = এক সমকোণ

$\therefore$ $\angle ODC <$ এক সমকোণ

অথবা ODC কোণ < OCD কোণ

$\therefore$ $OC < OD$

তদ্রূপ OC, OD-এর অনুরূপ যে-কোন রেখা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।
সুতরাং লম্ব OC-ই ক্ষুদ্রতম সরলরেখা।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ O বিন্দু হইতে যদি এরূপ দুইটি সরলরেখা টানা যায় যাহা OC লম্বের পাদবিন্দু হইতে সমান দূরত্বে AB-এর সহিত মিলিত হয়, তাহা হইলে ঐ সরলরেখাদ্বয় পরস্পর সমান হইবে।

[OD এবং OF এইরূপ দুইটি সরলরেখা হইলে OCD ও OCF ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।]

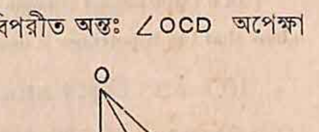
মন্তব্য ঃ লম্ব OC-এর দৈর্ঘ্যকে AB হইতে O বিন্দুর **দূরত্ব** বলা হয় এবং OD, OE, OF প্রভৃতি রেখাকে **তির্যকরেখা** (Oblique) বলে।

বিবিধ অনুশীলনী

1. একটি নির্দিষ্ট বহিঃস্থ বিন্দু হইতে একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা পর্যন্ত যে-সকল সরলরেখা টানা যায় তন্মধ্যে ক্ষুদ্রতম সরলরেখাটিই লম্ব। (বিপরীত প্রতিজ্ঞা)

2. AB সরলরেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দু O হইতে AB-এর উপর লম্ব OC ; OD ও OE অপর যে-কোন দুই সরলরেখা AB-এর সহিত D ও E বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। CD$<$CE হইলে, প্রমাণ কর OD$<$OE.

প্রমাণ ঃ $\triangle$OCD-এর বহিঃ $\angle$ODE বিপরীত অন্তঃ $\angle$OCD অপেক্ষা বৃহত্তর,



কিন্তু $\angle$OCD = এক সমকোণ

$\therefore$ ODE স্থূলকোণ

সুতরাং ODE ত্রিভুজের OE বৃহত্তম বাহু।

$\therefore$ OD $<$ OE]

3. ABC ত্রিভুজে $\angle$B স্থূলকোণ এবং D বিন্দু BC-এর উপর অবস্থিত। প্রমাণ কর AB $<$ AD $<$ AC.

4. ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজে AD একটি মধ্যমা। প্রমাণ কর AD$<$BC.

5. ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে ভূমি BC-এর উপর AD লম্ব ; ADCE একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কন করা হইল, প্রমাণ কর যে ABC ত্রিভুজের পরিসীমা আয়তক্ষেত্র ADCE-এর পরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর।

6. ABC ত্রিভুজের A কোণ বৃহত্তম। প্রমাণ কর যে AB, AC, 2BC বাহুবিশিষ্ট কোন ত্রিভুজ অঙ্কন করা যায় না।

[ABC is a triangle in which A is the greatest angle. Prove that it is impossible to construct a triangle with sides AB, AC, 2BC.]

7. চতুর্ভুজের মধ্যে এমন একটি বিন্দু নির্ণয় কর যাহা হইতে কৌণিক বিন্দু চারিটির দূরত্বের সমষ্টি ন্যূনতম হইবে।

[Find a point within a quadrilateral such that the sum of its distances from the angular points may be the least.]

8. ABC ত্রিভুজে $\angle B$ সমকোণ ; D, AC-এর মধ্যবিন্দু হইলে প্রমাণ কর $BD = \frac{1}{2}AC$.

সংকেত : BD-কে E পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন DE = BD হয় ; EC যুক্ত কর।]

9. কোন সমকোণী ত্রিভুজে যদি একটি সূক্ষ্মকোণ অন্যটির দ্বিগুণ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে অতিভুজ ক্ষুদ্রতর বাহুটির দ্বিগুণ।

[In a right-angled triangle if one of the acute angles is double of the other, show that the hypotenuse is double of the shorter side.]

10. ABC ত্রিভুজে AB = AC ; BA-কে D পর্যন্ত এরূপে বর্ধিত করা হইল যে AD = BA ; CD যুক্ত করিয়া প্রমাণ কর যে $\angle BCD$ = এক সমকোণ।

11. ত্রিভুজের যে-কোন দুই বাহুর লম্বদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের ছেদবিন্দু কৌণিক বিন্দুগুলি হইতে সমদূরবর্তী।

[The point of intersection of the perpendicular bisectors of any two sides of a triangle is equidistant from the vertices of the triangle.]

12. ত্রিভুজের যে-কোন দুই কোণের দ্বিখণ্ডকদ্বয়ের ছেদবিন্দু ত্রিভুজের বাহুগুলি হইতে সমদূরবর্তী।

[The point of intersection of the bisectors of any two angles of a triangle is equidistant from the sides of the triangle.]

13. AB একটি সরলরেখা এবং O উহার বহিঃস্থ কোন বিন্দু ; প্রমাণ কর, O হইতে AB পর্যন্ত তিনটি সমান সরলরেখা টানা সম্ভব নয়।

14. ABC ত্রিভুজে BD একটি মধ্যমা ; $BD=\frac{1}{2}AC$ হইলে প্রমাণ কর, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

15. প্রমাণ কর যে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি এবং ভূমির যে-কোন প্রান্ত-বিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব—এই দুই-এর অন্তর্ভূত কোণ শিরঃকোণের অর্ধাংশ।

16. AB সরলরেখার একটি বিন্দু O-তে অপর একটি সরলরেখা OC মিলিত হইয়াছে ; OC-এর উপর যে-কোন একটি বিন্দু P দিয়া AB-এর সমান্তরাল রেখা টানিলে উহা $\angle COB$ ও $\angle COA$-এর দ্বিখণ্ডকদ্বয়কে যথাক্রমে Q ও R বিন্দুতে ছেদ করিল ; প্রমাণ কর $PQ=PR$।

17. ABC একটি ত্রিভুজ ; BD, CE যথাক্রমে AC ও AB-এর উপর লম্ব। $BD=CE$ হইলে, প্রমাণ কর যে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

18. ABC ত্রিভুজে BC-এর মধ্যবিন্দু D হইতে DE ও DF যথাক্রমে AC ও AB-এর উপর লম্ব। $DE=DF$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

(*i*) ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু

(*ii*) AD, FE-এর লম্ব-দ্বিখণ্ডক।

19. প্রমাণ কর যে রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে দ্বিখণ্ডিত হয়।

[Prove that the diagonals of a rhombus bisect one another at right angles.]

20. প্রমাণ কর রম্বসের যে-কোন দুইটি বিপরীত কোণ উহাদের সংযোজক সরলরেখা দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হয়।

[Show that any pair of opposite angles of a rhombus is bisected by the diagonal joining them.]

চতুর্থ অধ্যায়

সম্পাদ্য

এই অংশে কয়েকটি সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা সম্বন্ধে আলোচনা করা যাইবে। মাপনী ও কম্পাসের সাহায্যে কতকগুলি অঙ্কন সম্পন্ন হইবে এবং এই অঙ্কনগুলির নির্ভুলতা যুক্তিপ্রয়োগে প্রমাণিত হইবে। সম্পাদ্যে অঙ্কনই মুখ্য বলিয়া অঙ্কন-প্রণালী সম্বন্ধে বিশেষ সতর্কতা অবলম্বনের প্রয়োজন। মাপনী ও কম্পাসের যথাযথ ব্যবহার জানা আবশ্যক। যথা—

(1) দুইটি বিন্দু যুক্ত করার সময় সরলরেখাটি যাহাতে ঠিক বিন্দু দুইটি দিয়া যায় সে বিষয়ে লক্ষ্য রাখিতে হইবে।

(2) কম্পাসের কাঁটাটি বিন্দুর উপর যথাযথভাবে পড়িল কিনা সে বিষয়ে লক্ষ্য রাখিতে হইবে।

অঙ্কনের বিশুদ্ধতা প্রমাণের জন্য যে-সকল অতিরিক্ত রেখা অঙ্কন আবশ্যক হইবে সেগুলি শ্রেণীবদ্ধ বিন্দু (ফুট্‌কি) দ্বারা সূচিত করা বাঞ্ছনীয়।

অঙ্কন নির্ভুল হইল কিনা সে বিষয়ে উপযুক্ত যন্ত্রাদির দ্বারা পরিমাপ করিয়া পরীক্ষা করিয়া দেখা উচিত। এজন্য নিম্নলিখিত যন্ত্রগুলি আবশ্যক হইবে।

(1) একখানি সরল মাপনী (Flat ruler)—ইহার একদিকে ইঞ্চি ও উহার দশমাংশ এবং অন্যদিকে সেন্টিমিটার ও উহার দশমাংশ চিহ্নিত থাকিবে।

(2) দুইখানি ত্রিকোণী ((Two Set-squares).

(3) একখানি কোণচক্র বা চাঁদা (Semi-circular Protractor).

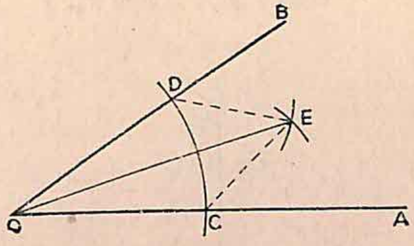
(4) পেন্সিল কম্পাস (Pencil Compasses).

(5) কাঁটা কম্পাস (Dividers).

সম্পাদ্য 1

একটি নির্দিষ্ট কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

[To bisect a given angle.]



AOB একটি নির্দিষ্ট কোণ।

এই কোণটিকে একটি সরলরেখা দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : O-কে কেন্দ্র করিয়া যে-কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কন কর। এই চাপ OA ও OB-কে যথাক্রমে C এবং D বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন C-কে কেন্দ্র করিয়া CD-এর অর্ধাংশ অপেক্ষা বৃহত্তর যে-কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কন কর, আবার D-কে কেন্দ্র করিয়া একই ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি চাপ অঙ্কন কর। এই চাপ দুইটি E বিন্দুতে ছেদ করিল। CE যুক্ত কর।

তাহা হইলে OE রেখাই ∠AOB-কে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

প্রমাণ : CE, DE যুক্ত কর।

OCE, ODE ত্রিভুজদ্বয়ে,

যেহেতু, OC = OD (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া),

CE = DE (সমান সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া)

এবং OE সাধারণ বাহু

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। সুতরাং ∠COE = ∠DOE

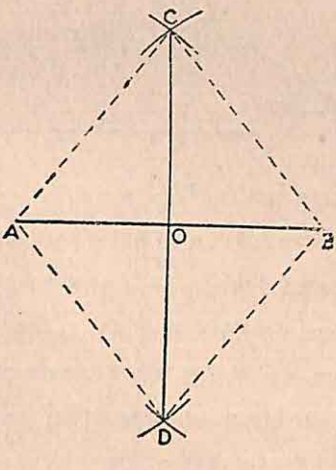
অর্থাৎ OE রেখা ∠AOB-কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

দ্রষ্টব্য : C ও D-কে কেন্দ্র করিয়া যে চাপ দুইটি অঙ্কিত হইয়াছে তাহাদের ব্যাসার্ধ CD-এর অর্ধাংশ অপেক্ষা বৃহত্তর না হইলে চাপ দুইটি পরস্পরকে ছেদ করিবে না, ফলে অঙ্কন অসম্ভব হইবে।

সম্পাদ্য 2

একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

bisect a given straight line.]



AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা ; ইহাকে সমান দুই অংশে বিভক্ত করিতে হইবে (অর্থাৎ ইহার মধ্যবিন্দু নির্ণয় করিতে হইবে)।

অঙ্কন : A-কে কেন্দ্র করিয়া AB-এর অর্ধাংশ অপেক্ষা বৃহত্তর যে-কোন ব্যাসার্ধ লইয়া AB-এর উভয় পার্শ্বে দুইটি চাপ অঙ্কন কর ; আবার B-কে কেন্দ্র করিয়া একই ব্যাসার্ধ লইয়া BA-এর উভয় পার্শ্বে অপর দুইটি চাপ অঙ্কন কর। এই চাপ দুইটি পূর্বোক্ত চাপ দুইটিকে, মনে কর, C ও D বিন্দুতে ছেদ করিল।

CD যুক্ত করিলে ইহা AB-কে যে বিন্দুতে ছেদ করিল, মনে কর উহা O.

তাহা হইলে O, AB-এর মধ্যবিন্দু হইবে।

প্রমাণ : AC, BC, AD, BD যুক্ত কর।

ACD, BCD ত্রিভুজদ্বয়ে,

যেহেতু $\left.\begin{array}{l} AC=BC \\ AD=BD \end{array}\right\}$ সমান সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া

এবং CD সাধারণ বাহু

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

অতএব $\angle ACD=\angle BCD$

আবার, ACO, BCO ত্রিভুজদ্বয়ে

যেহেতু, $AC=BC$,

CO সাধারণ বাহু

এবং অন্তর্ভূত $\angle ACO=$ অন্তর্ভূত $\angle BCO$

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম

সুতরাং $AO=BO$

অর্থাৎ AB রেখা O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।

দ্রষ্টব্য ঃ একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে সমদ্বিখণ্ডিত করার যে অঙ্কন-প্রণালী প্রদত্ত হইল তাহা দ্বারা রেখাটির লম্বদ্বিখণ্ডকও নির্ণীত হইবে। চিত্রে, AOC ও BOC ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হওয়ায় $\angle AOC=\angle BOC$ এবং ইহারা সন্নিহিত কোণ বলিয়া প্রত্যেকে এক সমকোণ, সুতরাং OC, AB-এর **লম্বদ্বিখণ্ডক**।

অনুশীলনী (1-2 সম্পাদ্য বিষয়ক)

1. কোণ-চক্রের সাহায্যে $30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ, 70^\circ, 80^\circ$ কোণগুলি অঙ্কন করিয়া উহাদিগকে দ্বিখণ্ডিত কর। প্রতিক্ষেত্রে কোণচক্রদ্বারা মাপিয়া অঙ্কনের নির্ভুলতা পরীক্ষা কর।

2. A একটি নির্দিষ্ট কোণ। ঐ কোণের যে-কোন বাহুর সহিত $\frac{3}{4}A$ কোণটি অঙ্কন কর।

3. যে-কোন একটি কোণ লইয়া উহার অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডক অঙ্কন কর। কোণচক্রদ্বারা মাপিয়া দ্বিখণ্ডক রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণটি নির্ণয় কর।

4. যে-কোন একটি ত্রিভুজ লইয়া উহার কোণগুলি দ্বিখণ্ডিত কর। লক্ষ্য কর দ্বিখণ্ডক রেখা তিনটি একই বিন্দুতে মিলিত হইবে।

5. ABC একটি ত্রিভুজ। ইহার BC বাহুর উপর এরূপ একটি বিন্দু নির্ণয় কর যাহা AB ও AC হইতে সমদূরবর্তী।

6. একটি সরলকোণকে দ্বিখণ্ডিত করিয়া সরলরেখার কোন বিন্দুতে লম্ব অঙ্কনের পদ্ধতি স্থির কর।

7. মাপনীর সাহায্যে একটি 2 ইঞ্চি ও একটি 4 ইঞ্চি সরলরেখা লও। প্রথমোক্তটিকে দুই ও শেষোক্তটিকে চারি সমান অংশে বিভক্ত কর। মাপিয়া দেখ প্রতি অংশ 1 ইঞ্চি হইল কিনা।

8. একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার কোন প্রান্তবিন্দু হইতে ইহার $\frac{7}{8}$ অংশ চিহ্নিত কর।

9. যে-কোন একটি ত্রিভুজ লইয়া উহার মধ্যমা তিনটি অঙ্কন কর। লক্ষ্য কর মধ্যমা তিনটি একই বিন্দুতে মিলিত হইবে।

যে-কোন কৌণিক বিন্দু হইতে ছেদবিন্দু পর্যন্ত মধ্যমার অংশটি দ্বিখণ্ডিত কর। মাপিয়া দেখ মধ্যমাটি যে তিন অংশে বিভক্ত হইল তাহারা পরস্পর সমান।

10. যে-কোন একটি ত্রিভুজ লইয়া উহার বাহু তিনটির লম্বদ্বিখণ্ডক অঙ্কন কর। লক্ষ্য কর রেখা তিনটি একই বিন্দুতে মিলিত হইবে।

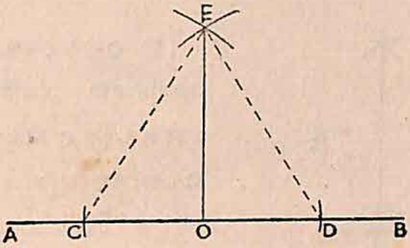
11. যে-কোন একটি ত্রিভুজ ABC লও। AB ও AC-এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E নির্ণয় কর এবং DE যুক্ত কর; এখন BC-এর মধ্যবিন্দু F নির্ণয় কর। মাপিয়া দেখ (*i*) DE=BF এবং (*ii*) $\angle$ADE=$\angle$ABC হইয়াছে।

12. A ও B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং CD একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। CD-এর উপর এরূপ একটি বিন্দু নির্ণয় কর যাহা A ও B হইতে সমদূরবর্তী হইবে। সকল ক্ষেত্রেই এরূপ বিন্দু পাওয়া যাইবে কি?

সম্পাদ্য 3

একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে ঐ সরলরেখার উপর একটি লম্ব অঙ্কন করিতে হইবে।

[To draw a straight line perpendicular to a given straight line at a given point in it.]



AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং O এই রেখাস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

O বিন্দু দিয়া AB-এর উপর একটি লম্ব অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন ঃ O-কে কেন্দ্র করিয়া AB হইতে যে-কোন দুইটি সমান অংশ OC, OD কাটিয়া লও। এখন, C ও D-কে কেন্দ্র করিয়া CO অপেক্ষা বৃহত্তর যে-কোন একই ব্যাসার্ধ লইয়া (AB-এর একই পার্শ্বে) দুইটি চাপ অঙ্কন কর। মনে কর, এই চাপ দুইটি পরস্পরকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। OE যুক্ত কর।

তাহা হইলে OE রেখাই AB-এর উপর লম্ব হইবে।

প্রমাণ ঃ CE, DE যুক্ত কর। EOC, EOD ত্রিভুজদ্বয়ে

যেহেতু OC = OD (অঙ্কন অনুসারে), EO সাধারণ বাহু এবং

CE = DE (সমান সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া)

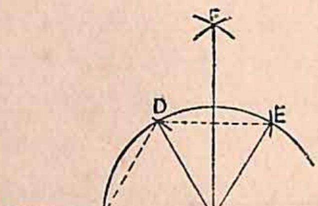
$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম, সুতরাং $\angle EOC = \angle EOD$ এবং ইহারা সন্নিহিত কোণ। সুতরাং প্রত্যেকে এক সমকোণ ; অর্থাৎ OE, AB-এর উপর লম্ব।

মন্তব্য ঃ

(1) অঙ্কনের প্রয়োজনে AB রেখাকে যে-কোন দিকে যথেচ্ছা বর্ধিত করা যাইতে পারে।

(2) লক্ষ্য করিবে এই অঙ্কন-পদ্ধতি ও একটি সরলকোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করার পদ্ধতি অভিন্ন।

বিকল্প পদ্ধতি ঃ



(1) O-কে কেন্দ্র করিয়া যে-কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কন কর। ইহা AB-কে C বিন্দুতে ছেদ করিল। C-কে কেন্দ্র করিয়া একই ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি চাপ অঙ্কন করিলে এই চাপ পূর্ব চাপকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন D-কে কেন্দ্র করিয়া পুনরায় একই ব্যাসার্ধ লইয়া তৃতীয় একটি চাপ অঙ্কন করিলে মনে কর, উহা প্রথম চাপকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন OD, OE যুক্ত করিয়া $\angle$DOE-কে OF দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত কর।

তাহা হইলে OF, AB-এর উপর লম্ব হইবে।

প্রমাণ ঃ

DC, DE যুক্ত কর।

একই ব্যাসার্ধ লইয়া চাপগুলি অঙ্কিত হইয়াছে বলিয়া COD ও DOE ত্রিভুজদ্বয় সমবাহু।

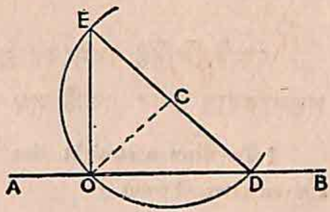
$\therefore \quad \angle COD = \angle DOE = 60^\circ$

এবং $\angle DOF = \frac{1}{2} \angle DOE = 30^\circ$

$\therefore \quad \angle AOF = \angle COD + \angle DOF = 90^\circ$

অর্থাৎ OF, AB-উপর লম্ব।

(2) AB-এর বহিঃস্থ যে-কোন বিন্দু C লও।



C-কে কেন্দ্র করিয়া CO ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন করিলে, মনে কর, উহা AB-কে অপর একটি বিন্দু D-তে ছেদ করিল।

DC যুক্ত কর এবং ইহাকে বর্ধিত করিয়া বৃত্তের সহিত E বিন্দুতে মিলিত কর।

OE যুক্ত কর।

তাহা হইলে OE, AB-এর উপর লম্ব হইবে।

প্রমাণ ঃ OC যুক্ত কর।

যেহেতু $CD = CO$,

$\therefore \angle COD = \angle CDO$

আবার যেহেতু $CE = CO$,

$\therefore \angle COE = \angle CEO$

$\therefore \angle DOE = \angle COD + \angle COE$

$= \angle EDO + \angle DEO$

$= \frac{1}{2} \times 180° = 90°$

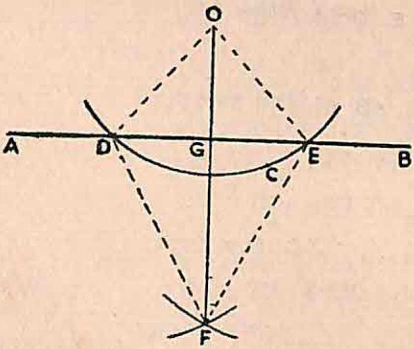
অর্থাৎ OE, AB-এর উপর লম্ব।

মন্তব্য ঃ নির্দিষ্ট বিন্দুটি যদি সরলরেখাটির প্রান্তবিন্দু বা উহার সমীপবর্তী কোন বিন্দু হয় তাহা হইলে সরলরেখাটিকে বর্ধিত না করিয়াও উল্লিখিত বিকল্প পদ্ধতি দুইটির যে-কোনটি দ্বারা লম্ব অঙ্কন করা যাইতে পারে।

সম্পাদ্য 4

একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার বহিঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে ঐ সরলরেখার উপর একটি লম্ব অঙ্কন করিতে হইবে।

[To draw a straight line perpendicular to a given straight line from a given external point.]



AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং O বহিঃস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

O হইতে AB-এর উপর একটি লম্ব অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন : AB-এর যে পার্শ্বে O বিন্দু অবস্থিত তাহার বিপরীত পার্শ্বে যে-কোন বিন্দু C লও।

O-কে কেন্দ্র করিয়া OC ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কন কর। মনে কর ঐ চাপ AB-কে (বা AB-এর বর্ধিতাংশকে) D ও E বিন্দুতে ছেদ করিল।

এখন D ও E-কে কেন্দ্র করিয়া DE-এর অর্ধাংশ অপেক্ষা বৃহত্তর যে-কোন একই ব্যাসার্ধ লইয়া AB-এর যে পার্শ্বে O অবস্থিত তাহার বিপরীত পার্শ্বে দুইটি চাপ অঙ্কন কর। মনে কর, এই চাপ দুইটি পরস্পর F বিন্দুতে ছেদ করিল।

OF যুক্ত কর, ইহা AB-কে G বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে OG, O হইতে AB-এর উপর লম্ব হইবে।

প্রমাণ :

OD, OE, FD, FE যুক্ত কর।

ODF, OEF ত্রিভুজদ্বয়ে,

যেহেতু, OD = OE (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া)

FD = FE (সমান সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া)

এবং OF সাধারণ বাহু

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

অতএব $\angle DOF = \angle EOF$ অর্থাৎ $\angle DOG = \angle EOG$

পুনরায়, OGD, OGE ত্রিভুজদ্বয়ে,

যেহেতু, OD = OE,

OG সাধারণ বাহু

এবং অন্তর্ভূত $\angle DOG$ = অন্তর্ভূত $\angle EOG$

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

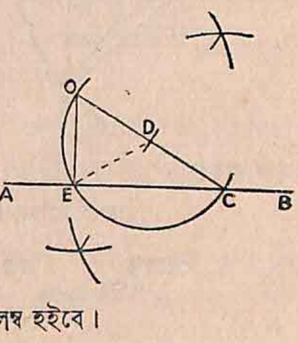
সুতরাং $\angle OGD = \angle OGE$;

ইহারা সন্নিহিত কোণ বলিয়া প্রত্যেকে এক সমকোণ।

অর্থাৎ OG, AB-এর উপর লম্ব।

বিকল্প পদ্ধতি :

(1) AB-এর উপর যে-কোন বিন্দু C লইয়া OC যুক্ত কর। OC-কে D বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত কর। এখন, D-কে কেন্দ্র করিয়া DC ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন করিলে ইহা AB-কে অপর এক বিন্দু E-তে ছেদ করিল। OE যুক্ত কর।



তাহা হইলে OE, O হইতে AB-এর উপর লম্ব হইবে।

প্রমাণ ঃ ED যুক্ত কর।

যেহেতু $DC=DE$ $\therefore \angle DEC=\angle DCE$

আবার যেহেতু $DO=DE$ $\therefore \angle DEO=\angle DOE$

স্থতরাং $\angle CEO=\angle DEC+\angle DEO$

$=\angle OCE+\angle COE$

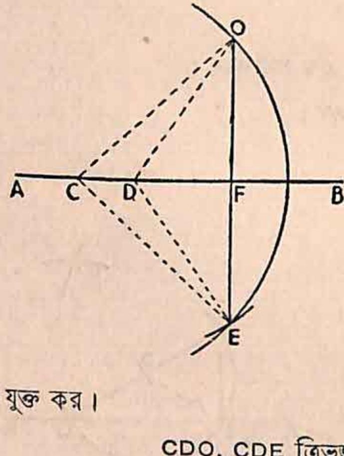
$=\frac{1}{2}\times 180^\circ$

$=90^\circ$

অর্থাৎ OE, AC-এর উপর লম্ব।

(2) AB-এর উপর যে-কোন দুইটি বিন্দু C ও D লও।

C-কে কেন্দ্র করিয়া CO ব্যাসার্ধ লইয়া AB-এর যে পার্শ্বে O অবস্থিত তাহার বিপরীত পার্শ্বে একটি চাপ অঙ্কন কর।



আবার D-কে কেন্দ্র করিয়া DO ব্যাসার্ধ লইয়া অপর একটি চাপ অঙ্কন কর যেন উহা পূর্বচাপকে E বিন্দুতে ছেদ করে।

CE যুক্ত কর। মনে কর, OE, AB-কে F বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে OF, O হইতে AB-এর উপর লম্ব হইবে।

প্রমাণ ঃ CO, DO, CE, DE যুক্ত কর।

CDO, CDE ত্রিভুজদ্বয়ে

যেহেতু, $\left.\begin{array}{l} CO=CE \\ DO=DE \end{array}\right\}$ (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া)

এবং CD সাধারণ বাহু

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

স্থতরাং $\angle DCO = \angle DCE$

পুনরায়, CFO, CFE ত্রিভুজদ্বয়ে,

যেহেতু $CO = CE$, CF সাধারণ বাহু

এবং অন্তর্ভূ´ত $\angle FCO =$ অন্তর্ভূ´ত $\angle FCE$

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

স্থতরাং $\angle CFO = \angle CFE$,

এবং ইহারা সন্নিহিত কোণ বলিয়া প্রত্যেকে এক সমকোণ ;

অর্থাৎ OF, AB-এর উপর লম্ব।

মন্তব্য ঃ O বিন্দু AB-এর কোন প্রান্তবিন্দুর সমীপবর্তী হইলে AB-কে বর্ধিত না করিয়াও উল্লিখিত বিকল্প পদ্ধতির যে-কোনটির সাহায্যে লম্ব অঙ্কন করা যাইতে পারে।

অনুশীলনী

1. একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে এরূপ একটি সরলরেখা অঙ্কন কর যাহা ঐ সরলরেখাটির সহিত 135° কোণ উৎপন্ন করিবে।

2. লম্ব অঙ্কন পদ্ধতি দ্বারা একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল একটি সরলরেখা অঙ্কন কর।

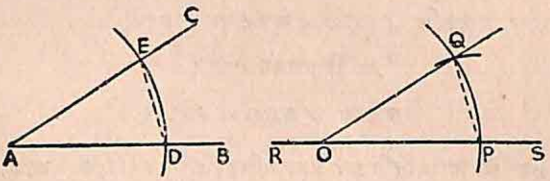
3. যে-কোন একটি ত্রিভুজ লইয়া উহার শীর্ষবিন্দুগুলি হইতে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব অঙ্কন কর। লক্ষ্য কর এই লম্বগুলি একই বিন্দুতে মিলিত হইবে।

[Draw perpendiculars from the vertices of a triangle on the respective opposite sides. Observe that the perpendiculars are concurrent.]

সম্পাদ্য 5

একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান করিয়া কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে একটি কোণ অঙ্কন করিতে হইবে।

[At a given point in a given straight line to make an angle equal to a given angle.]



BAC একটি নির্দিষ্ট কোণ, RS একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং RS-এর উপর O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

O বিন্দুতে BAC কোণের সমান করিয়া একটি কোণ অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন : A-কে কেন্দ্র করিয়া যে-কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কন কর। মনে কর, এই চাপ AB ও AC-কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করিল। O-কে কেন্দ্র করিয়া একই ব্যাসার্ধ লইয়া অপর একটি চাপ অঙ্কন করিলে মনে কর এই চাপ RS-কে P-বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন, P-কে কেন্দ্র করিয়া DE-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কন কর ; মনে কর এই চাপ পূর্বচাপকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। OQ যুক্ত কর। তাহা হইলে POQ অভীষ্ট কোণ হইবে।

প্রমাণ : DE, PQ যুক্ত কর।

POQ, DAE ত্রিভুজদ্বয়ে

যেহেতু OP = AD, OQ = AE } (সমান সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া)

এবং PQ = DE (অঙ্কন অনুযায়ী)

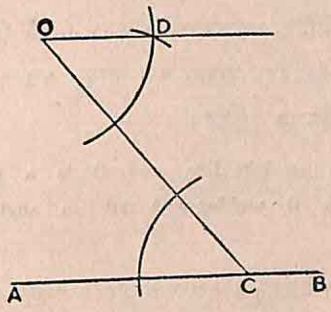
∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

সুতরাং $\angle POQ = \angle BAC$

সম্পাদ্য 6

একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল একটি সরলরেখা অঙ্কন করিতে হইবে।

[Through a given point to draw a straight line parallel to a given straight line.]



O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা।

O বিন্দু দিয়া AB-এর সমান্তরাল একটি সরলরেখা অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন : AB-এর উপর যে-কোন বিন্দু C লও এবং OC যুক্ত কর। এখন, OC সরলরেখার O বিন্দুতে OC-এর যে পার্শ্বে ∠OCA অবস্থিত তাহার বিপরীত পার্শ্বে OCA কোণের সমান করিয়া COD কোণটি অঙ্কন কর (পূর্ববর্তী সম্পাদ্য দেখ)।

তাহা হইলে OD, AB-এর সমান্তরাল হইবে।

প্রমাণ :

OD এবং AB এই দুই সরলরেখার সহিত OC মিলিত হইয়াছে এবং অঙ্কন অনুযায়ী ∠DOC ও ∠OCA পরস্পর সমান এবং ইহারা একান্তর কোণ ;

স্থতরাং OD, AB-এর সমান্তরাল।

মন্তব্য : O বিন্দুতে OCA কোণের সমান কোণ অঙ্কনের প্রয়োজনীয় রেখাদি চিত্রে দেখাইতে হইবে।

বিবিধ অনুশীলনী [3-5 সম্পাদ্য বিষয়ক]

1. একটি সরলরেখার কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে একটি নির্দিষ্ট কোণের সম্পূরক কোণ অঙ্কন কর।

[At a given point in a given straight line draw an angle supplementary to a given angle.]

2. AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। O বিন্দু দিয়া এরূপ একটি সরলরেখা অঙ্কন কর যাহা AB-এর সহিত একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান কোণ উৎপন্ন করিবে।

[AB is a given straight line and O is a given point. Draw a straight line through O making with AB an angle equal to a given angle.]

3. যে-কোন একটি ত্রিভুজ লও এবং উহার একটি বাহুর মধ্যবিন্দু নির্ণয় কর। এই বিন্দু দিয়া অপর এক বাহুর সমান্তরাল রেখা অঙ্কন কর। এখন পরীক্ষা করিয়া দেখ, সমান্তরাল রেখাটির যে অংশ ত্রিভুজটির বাহুদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ উহা তৃতীয় বাহুর অর্ধ পরিমাণ।

4. কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া এরূপ একটি সরলরেখা অঙ্কন কর যাহা দুইটি নির্দিষ্ট পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখার সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করিবে।

[Through a given point draw a straight line which will make equal angles with two given intersecting straight lines.]

5. AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং C ও D উহার একই পার্শ্বে অবস্থিত দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু। C ও D দিয়া এরূপ দুইটি সরলরেখা অঙ্কন কর যাহারা পরস্পর AB-এর কোন বিন্দুতে মিলিত হইবে এবং AB-এর সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করিবে।

[**সংকেত :** C হইতে AB-এর উপর CE লম্ব অঙ্কন কর এবং উহাকে F পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন EF = CE হয়; এখন FD যুক্ত করিলে উহা AB-কে

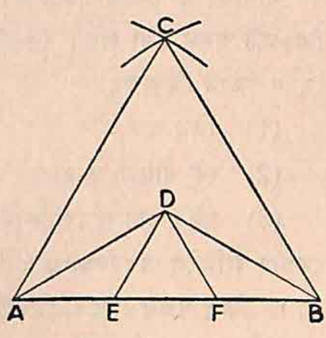
O বিন্দুতে ছেদ করিল। CO যুক্ত কর, তাহা হইলে CO ও DO অভীষ্ট রেখাদ্বয়।]

C ও D AB-এর বিপরীত পার্শ্বে লইয়া অঙ্কন সম্পন্ন কর। কোন ব্যতিক্রম লক্ষ্য করিলে কি ?

6. যে-কোন একটি ত্রিভুজ লও। ইহার একটি বাহুকে সমান চারি অংশে বিভক্ত কর। বাহুটির উপর যে তিনটি বিন্দু পাইলে ঐ বিন্দুগুলি দিয়া অপর একটি বাহুর সমান্তরাল রেখাগুলি অঙ্কন কর। পরীক্ষা করিয়া দেখ এই রেখাগুলি দ্বারা ত্রিভুজটির তৃতীয় বাহু সমান চারি অংশে বিভক্ত হইয়াছে।

7. একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে সমান তিন অংশে বিভক্ত কর।

[Trisect a given straight line.]



অঙ্কন : AB নির্দিষ্ট সরলরেখা। A ও B-কে কেন্দ্র করিয়া AB ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি চাপ অঙ্কন কর ; এই চাপদ্বয় C বিন্দুতে ছেদ করিল। AC, BC যুক্ত কর। এখন ∠A ও ∠B-কে দ্বিখণ্ডিত কর। মনে কর দ্বিখণ্ডকদ্বয় D বিন্দুতে মিলিত হইল। D বিন্দু দিয়া DE ও DF যথাক্রমে CA ও CB-এর সমান্তরাল করিয়া টান ; এই সমান্তরাল রেখাদ্বয় AB-কে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে E ও F বিন্দুতে নির্দিষ্ট AB সরলরেখাটি সমান তিন অংশে বিভক্ত হইবে। (প্রমাণ দাও)

ত্রিভুজ অঙ্কন

(Construction of Triangles)

প্রত্যেক ত্রিভুজের তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ এই ছয়টি অঙ্গ আছে। কিন্তু একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করিতে হইলে এই ছয় অঙ্গই জানা থাকার প্রয়োজন হয় না, কেননা ত্রিভুজের ছয় অঙ্গের মধ্যে কয়েকটি বিশেষ অঙ্গ নির্দিষ্ট হইলেই বাকী অঙ্গ কয়টির মান ঐগুলি হইতেই নির্ণীত হয়। উদাহরণস্বরূপ লক্ষ্য করিবে যে ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি প্রতি ক্ষেত্রেই 180° হইবে বলিয়া কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণ যদি দেওয়া থাকে তাহা হইলে তৃতীয়টি বলিয়া দেওয়ার আবশ্যক হয় না বা বলিয়া দিলেও সেটিকে অন্যনিরপেক্ষ অঙ্গ বলিয়া গণ্য করা যায় না।

সাধারণতঃ কোন ত্রিভুজের তিনটি অন্যনিরপেক্ষ অঙ্গ দেওয়া থাকিলেই ত্রিভুজটি অঙ্কন করা যায়। তিনটি অন্যনিরপেক্ষ অঙ্গ নানাপ্রকার হইতে পারে। যেমন কোন ত্রিভুজের

(1) তিন বাহু,

(2) দুই বাহু ও তাহাদের অন্তর্ভূত কোণটি,

(3) দুই কোণ ও যে-কোন একটি বাহু,

দেওয়া থাকিলে অপর অঙ্গগুলি নির্দিষ্ট হইয়া পড়ে এবং ত্রিভুজটির অঙ্কন সম্ভব হয়। কিন্তু সকল ক্ষেত্রে তিনটি অঙ্গ দেওয়া থাকিলেও ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব হয় না। যেমন ধর, যদি কোন ত্রিভুজের

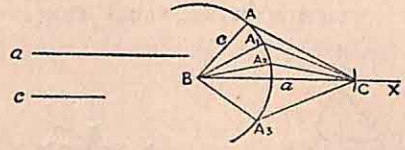
(i) দুই বাহু ও উহাদের একটির বিপরীত কোণ, বা

(ii) তিন কোণ

দেওয়া থাকে তাহা হইলে ত্রিভুজটি নির্দিষ্ট হয় না এবং ক্ষেত্রবিশেষে ঐ নির্দিষ্ট অঙ্গ-বিশিষ্ট দুইটি বা অসংখ্য ত্রিভুজ অঙ্কন করা যায়।

লক্ষ্য করিতে পার যে ত্রিভুজের তিন অঙ্গের কম, মনে কর, দুইটি অঙ্গ দেওয়া থাকিলে ঐ দুইটি অঙ্গ-বিশিষ্ট বিভিন্ন ত্রিভুজ অঙ্কিত হইতে পারে। মনে কর,

(1) কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহু (a, c) দেওয়া আছে।



যে কোন সরলরেখা BX হইতে a-এর সমান করিয়া BC অংশ কাটিয়া লও।

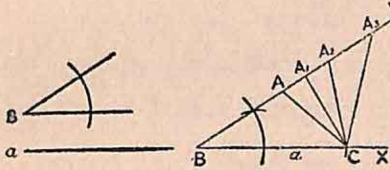
B-কে কেন্দ্র করিয়া c-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন কর। এই বৃত্তের পরিধিতে যে-কোন বিন্দু A লও এবং AB, AC যুক্ত কর।

তাহা হইলে ABC একটি ত্রিভুজ হইল যাহার BC $= a$ এবং AB $= c$

এখন, বৃত্তের পরিধির উপর A যে-কোন বিন্দু। সুতরাং পরিধির উপর ইচ্ছামত A_1, A_2, A_3……লইয়া B ও C-এর সহিত যুক্ত করিলে যে সকল ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে তাহাদের প্রত্যেকের দুই বাহু নির্দিষ্ট দুই সরলরেখার সমান হইবে। অতএব প্রদত্ত উপাত্ত হইতে একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব নয়।

(2) কোন ত্রিভুজের একটি কোণ (B) ও এই কোণের সংলগ্ন একটি বাহু (a) দেওয়া আছে।

যে-কোন সরলরেখা BX লও এবং ইহার B বিন্দুতে ∠B-এর সমান একটি কোণ XBY অঙ্কন কর।



BX হইতে a-এর সমান করিয়া BC অংশ কাট। BY-এর উপর যে-কোন বিন্দু A লও এবং AC যুক্ত কর।

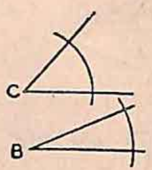
তাহা হইলে ABC একটি ত্রিভুজ হইল যাহার

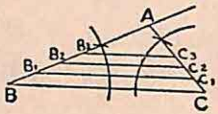
$$\angle ABC = \angle B \text{ এবং } BC = a$$

এখন, BY-এর উপর A যে-কোন বিন্দু। সুতরাং BY-এর উপর ইচ্ছামত A_1, A_2, A_3……লইয়া C-এর সহিত যুক্ত করিলে যে সকল ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে তাহাদের প্রত্যেকের একটি কোণ ও একটি বাহু, নির্দিষ্ট কোণ ও প্রদত্ত বাহুর সমান হইবে। সুতরাং প্রদত্ত উপাত্ত হইতে একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব নয়।

(3) কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণ (B, C) দেওয়া আছে।

যে-কোন দৈর্ঘ্যের একটি সরলরেখা BC লও এবং প্রান্তবিন্দু B ও C-তে রেখাটির একই দিকে যথাক্রমে প্রদত্ত ∠B ও ∠C-এর সমান করিয়া CBA ও BCA কোণ দুইটি অঙ্কন কর। মনে কর, বাহুদ্বয় পরস্পর A-বিন্দুতে ছেদ করিল।



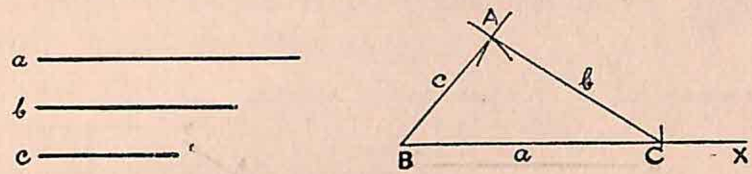


তাহা হইলে ABC একটি ত্রিভুজ হইল যাহার ∠ABC = ∠B এবং ∠ACB = ∠C। এখন B_1C_1, B_2C_2……সরলরেখাগুলি BC-এর সমান্তরাল করিয়া অঙ্কন করিলে যে AB_1C_1, AB_2C_2……ত্রিভুজগুলি পাওয়া যাইবে তাহাদের প্রত্যেকের দুইটি কোণ নির্দিষ্ট কোণ দুইটির সমান হইবে। সুতরাং প্রদত্ত উপাত্ত হইতে একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব নয়।

সম্পাদ্য 7

কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য নির্দিষ্ট আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

[**To draw a triangle having given the length of the three sides.**]



a, b, c তিনটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট সরলরেখা। একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করিতে হইবে যাহার তিন বাহু এই তিনটি সরলরেখার সমান।

অঙ্কন : যে-কোন একটি সরলরেখা BX হইতে a-এর সমান করিয়া BC অংশ কাটিয়া লও।

B-কে কেন্দ্র করিয়া c-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কন কর।

C-কে কেন্দ্র করিয়া b-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া অপর একটি চাপ অঙ্কন কর; এই চাপ পূর্বচাপকে A বিন্দুতে ছেদ করিল। AB, AC যুক্ত কর। তাহা হইলে $\triangle$ABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে।

প্রমাণ : অঙ্কন অনুযায়ী, $BC = a$, $CA = b$ এবং $AB = c$

মন্তব্য : (1) a, b, c-কে ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্যজ্ঞাপক সংখ্যা হিসাবেও গণ্য করা যায়।

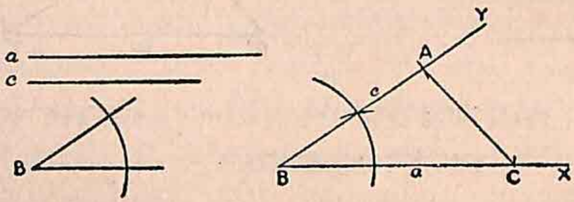
(2) b ও c একত্রে a অপেক্ষা বৃহত্তর না হইলে চাপ দুইটি পরস্পর ছেদ করিবে না এবং অঙ্কন অসম্ভব হইবে।

(3) চাপ দুইটি BC-এর অপর পার্শ্বেও পরস্পর ছেদ করিবে এবং এই ছেদবিন্দু B ও C-এর সহিত যুক্ত করিলে আরও একটি ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে।

সম্পাদ্য 8

কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহু এবং এই বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভূর্ত কোণটি নির্দিষ্ট আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

[To construct a triangle having given two sides and the included angle.]



a, c কোন ত্রিভুজের নির্দিষ্ট দুই বাহু এবং B নির্দিষ্ট অন্তর্ভূর্ত কোণ। ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন : যে-কোন একটি সরলরেখা BX লও এবং ইহার B বিন্দুতে প্রদত্ত ∠B-এর সমান করিয়া XBY কোণটি অঙ্কন কর।

BX হইতে a-এর সমান করিয়া BC অংশ এবং BY হইতে c-এর সমান করিয়া BA অংশ কাটিয়া লও।

AC যুক্ত কর।

তাহা হইলে ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে।

প্রমাণ : অঙ্কন অনুযায়ী, ABC ত্রিভুজের

BC $= a$, BA $= c$ এবং অন্তর্ভূর্ত ∠ABC $=$ ∠B

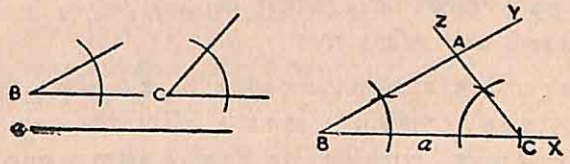
সম্পাদ্য 9

কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণ ও যে-কোন একটি বাহু নির্দিষ্ট আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

(1) প্রদত্ত বাহুটি নির্দিষ্ট কোণদ্বয়ের সন্নিহিত বাহু ; অর্থাৎ

কোন ত্রিভুজের দুই কোণ ও উহাদের সন্নিহিত বাহু নির্দিষ্ট আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

[To construct a triangle having given two angles and the side adjacent to the given angles.]



B, C কোন ত্রিভুজের নির্দিষ্ট কোণদ্বয় এবং a উহাদের সন্নিহিত নির্দিষ্ট বাহু। ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন ঃ যে-কোন সরলরেখা BX হইতে নির্দিষ্ট বাহু a-এর সমান করিয়া BC অংশ কাটিয়া লও।

B ও C বিন্দুতে ∠B ও ∠C-এর সমান করিয়া যথাক্রমে CBY এবং BCZ কোণ দুইটি অঙ্কন কর।

BY, CZ পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে।

প্রমাণ ঃ অঙ্কন অনুযায়ী, ABC ত্রিভুজের

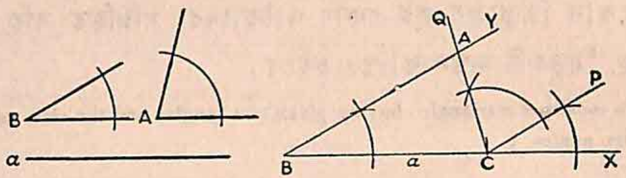
$$\angle ABC = \angle B, \ \angle ACB = \angle C$$

এবং এই দুই কোণের সন্নিহিত বাহু BC $= a$.

(2) প্রদত্ত বাহুটি নির্দিষ্ট কোণ দুইটির যে-কোনটির বিপরীত বাহু, অর্থাৎ

কোন ত্রিভুজের দুই কোণ ও উহাদের যে-কোনটির বিপরীত বাহু নির্দিষ্ট আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

[To construct a triangle having given two angles and a side opposite to one of them.]



A, B কোন ত্রিভুজের নির্দিষ্ট কোণদ্বয় এবং a, A কোণের বিপরীত নির্দিষ্ট বাহু। ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন ঃ যে-কোন সরলরেখা BX হইতে a-এর সমান BC কাটিয়া লও। বন্দুতে XBY কোণটি ∠B-এর সমান করিয়া অঙ্কন কর। C বিন্দুতে ∠B-এর সমান করিয়া ∠XCP এবং ∠A-এর সমান করিয়া ∠PCQ অঙ্কন কর।

BY এবং CQ A বিন্দুতে মিলিত হইলে ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে।

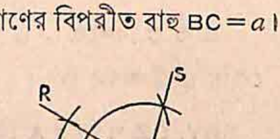
প্রমাণ ঃ ∠XCP = ∠CBY, কারণ অঙ্কন অনুযায়ী উভয়েই ∠B-এর সমান এবং ইহারা অনুরূপ কোণ ; সুতরাং BY এবং CP পরস্পর সমান্তরাল।

অতএব ∠BAC = একান্তর ∠ACP = প্রদত্ত ∠A (অঙ্কন)

সুতরাং ABC ত্রিভুজে

∠BAC = ∠A, ∠ABC = ∠B এবং BAC কোণের বিপরীত বাহু BC = a।

বিকল্প পদ্ধতি ঃ যে-কোন সরলরেখা PQ-তে একটি বিন্দু O লও। POR এবং ROS কোণদ্বয় যথাক্রমে ∠B ও ∠A-এর সমান করিয়া অঙ্কন কর।



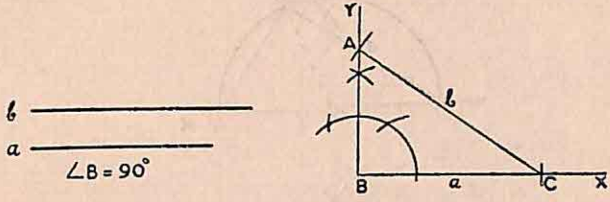
তাহা হইলে SOQ কোণটি ত্রিভুজের অবশিষ্ট কোণ C-এর সমান হইবে।

এখন প্রদত্ত বাহু a, B ও C কোণের সন্নিহিত বাহু হওয়ায় প্রথমোক্ত পদ্ধতি (1) অনুযায়ী ত্রিভুজটি অঙ্কিত হইবে।

সম্পাদ্য 10

একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর একটি বাহু নির্দিষ্ট আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

[To construct a right-angled triangle having given the hypotenuse and one side.]



একটি সমকোণী ত্রিভুজের b নির্দিষ্ট অতিভুজ এবং a অপর নির্দিষ্ট বাহু। ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন : যে-কোন সরলরেখা BX হইতে নির্দিষ্ট a বাহুর সমান করিয়া BC অংশ কাটিয়া লও।

B বিন্দুতে BX-এর উপর BY লম্ব অঙ্কন কর। C-কে কেন্দ্র করিয়া b-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কন কর।

এই চাপ BY-কে A বিন্দুতে ছেদ করিল।

CA যুক্ত কর।

তাহা হইলে ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে।

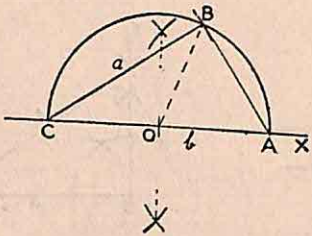
প্রমাণ : অঙ্কন অনুযায়ী, ∠ABC = এক সমকোণ

BC = নির্দিষ্ট বাহু a, CA = নির্দিষ্ট অতিভুজ b

মন্তব্য : সমকোণী ত্রিভুজে অতিভুজ বৃহত্তম বাহু। সুতরাং প্রদত্ত b রেখা a অপেক্ষা অবশ্য বৃহত্তর লইতে হইবে।

বিকল্প পদ্ধতি ঃ

অঙ্কন ঃ যে-কোন সরলরেখা CX হইতে অতিভুজ b-এর সমান করিয়া CA অংশ কাটিয়া লও। CA-কে O বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত কর। O-কে কেন্দ্র



করিয়া OA ব্যাসার্ধ লইয়া একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন কর। C-কে কেন্দ্র করিয়া a-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কন কর। এই চাপ পরিধিকে B বিন্দুতে ছেদ করিল। CB, AB যুক্ত কর।

তাহা হইলে ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে।

প্রমাণ ঃ BO যুক্ত কর।

যেহেতু $OC = OB \quad \therefore \quad \angle OBC = \angle OCB$

$OA = OB \quad \therefore \quad \angle OBA = \angle OAB$

অতএব সমগ্র $\angle ABC = \angle OBC + \angle OBA$

$= \angle OCB + \angle OAB$

$= \frac{1}{2} \times 180^\circ$

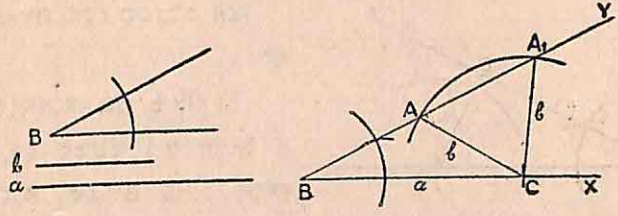
$= 90^\circ$

অঙ্কন অনুসারে $CA = b$, $BC = a$

সম্পাদ্য 11

কোন ত্রিভুজের দুই বাহু এবং উহাদের একটি বাহুর বিপরীত কোণ নির্দিষ্ট আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

[To construct a triangle having given two sides and an angle opposite to one of them.]



a, b, কোন ত্রিভুজের নির্দিষ্ট দুই বাহু এবং $\angle B$, b-বাহুর বিপরীত নির্দিষ্ট কোণ। ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন ঃ যে-কোন সরলরেখা BX হইতে a-এর সমান করিয়া BC অংশ কাটিয়া লও।

B বিন্দুতে নির্দিষ্ট B কোণের সমান করিয়া XBY কোণটি অঙ্কন কর।

C-কে কেন্দ্র করিয়া b-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কন কর।

যদি এই চাপ BY-কে B-বিন্দুর একই পার্শ্বে A ও A_1 বিন্দুদ্বয়ে ছেদ করে, তবে AC ও A_1C যুক্ত করিলে ABC ও A_1BC ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে। এই উভয় ত্রিভুজেই প্রদত্ত সর্তসমূহ পালিত হইয়াছে। সুতরাং ইহাদের যে-কোনটি উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে।

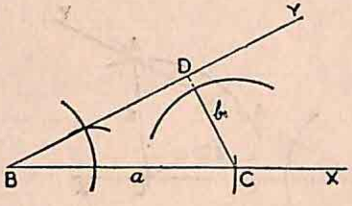
প্রমাণ ঃ অঙ্কন অনুযায়ী,

(i) ABC ত্রিভুজের $BC=a$, $CA=b$ এবং CA বাহুর বিপরীত $\angle ABC$ $=$নির্দিষ্ট $\angle B$;

(ii) A_1BC ত্রিভুজের $BC=a$, $CA_1=b$ এবং CA_1 বাহুর বিপরীত $\angle A_1BC=$নির্দিষ্ট $\angle B$

মন্তব্য : (ক) ইহাকে **দ্ব্যর্থক ক্ষেত্র (Ambiguous case)** বলে। দ্ব্যর্থক ক্ষেত্রে $\angle BAC$ এবং $\angle BA_1C$ পরস্পরের সম্পূরক।

(খ) লক্ষ্য করিবে সকল ক্ষেত্রে এরূপ দুইটি ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে না। প্রদত্ত বাহু b-এর দৈর্ঘ্য অনুযায়ী কোনও ক্ষেত্রে একটি, কোনও ক্ষেত্রে দুইটি ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে, আবার কোনও ক্ষেত্রে একটিও ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে না। নিম্নে এই সকল ক্ষেত্রে প্রদর্শিত হইল।

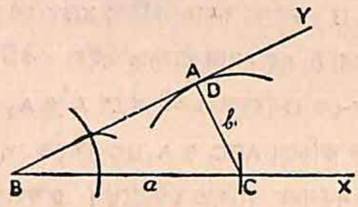


মনে কর, CD রেখা BY-এর উপর লম্ব।

(1) যদি b, CD অপেক্ষা (সুতরাং a অপেক্ষাও) ক্ষুদ্রতর হয়, তাহা হইলে চাপটি BY-কে আদৌ ছেদ করিবে না।

এক্ষেত্রে প্রদত্ত উপাত্ত হইতে ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব নয়।

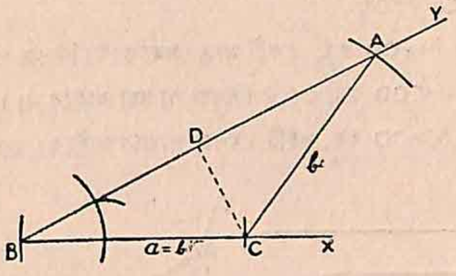
(2) যদি b, CD-এর সমান (কাজেই a অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর) হয়, তাহা হইলে চাপটি BY-কে একটি বিন্দু A-তে স্পর্শ করিবে ; এক্ষেত্রে প্রদত্ত উপাত্ত



হইতে একটি মাত্র (সমকোণী) ত্রিভুজ ABC পাওয়া যাইবে এবং ইহাই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে।

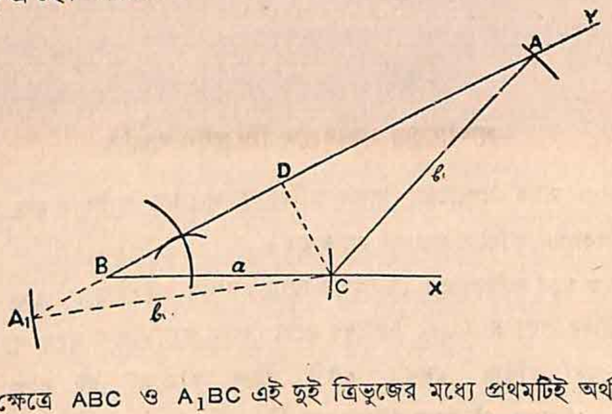
(3) যদি b, CD অপেক্ষা বৃহত্তর, কিন্তু নির্দিষ্ট a বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয় তাহা হইলে চাপটি BY-কে B-এর পার্শ্বে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিবে (সম্পাদ্য 11-এর চিত্র দেখ)। ইহাই **দ্ব্যর্থক ক্ষেত্র**।

(4) যদি b, CD অপেক্ষা বৃহত্তর, কিন্তু নির্দিষ্ট a বাহুর সমান হয়, তাহা হইলে চাপটি B বিন্দু দিয়া যাইবে ও BY-কে অপর একটি বিন্দু A-তে ছেদ করিবে।



এক্ষেত্রে প্রদত্ত উপাত্ত হইতে একটি মাত্র ত্রিভুজ ABC (সমদ্বিবাহু) পাওয়া যাইবে এবং ইহাই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে।

(5) যদি b, নির্দিষ্ট a বাহু অপেক্ষা (সুতরাং CD অপেক্ষাও) বৃহত্তর হয়, তাহা হইলে চাপটি BY-কে A বিন্দুতে এবং YB-এর বর্ধিতাংশকে অপর একটি বিন্দু A_1-এ ছেদ করিবে।



এ ক্ষেত্রে ABC ও A_1BC এই দুই ত্রিভুজের মধ্যে প্রথমটিই অর্থাৎ ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে, কেননা $\triangle A_1BC$-এর A_1BC কোণ নির্দিষ্ট $\angle B$-এর সমান নহে, উহার সম্পূরক।

আলোচ্য (1-5) এই সকল ক্ষেত্র বিষয়ে **সংক্ষেপে বলা যায়** :—

(*i*) $b>a$ হইলে, একটি মাত্র ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে।

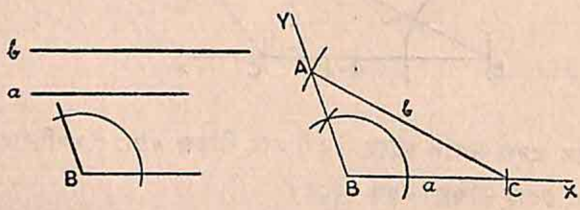
(*ii*) $b=a$ হইলে, একটি মাত্র সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে।

(*iii*) $b<a$ হইলে,

(ক) যদি $b=$ CD হয়, একটি মাত্র (সমকোণী) ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে।

(খ) যদি $b<$ CD হয়, কোন ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে না।

(গ) যদি $b>$ CD হয়, দুইটি ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে (দ্ব্যর্থক ক্ষেত্র)।



(6) প্রদত্ত ∠B স্থূলকোণ হইলে b বাহু ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহু বলিয়া $b>a$ হইবে এবং এ ক্ষেত্রে অনুরূপ পদ্ধতিতে ত্রিভুজ অঙ্কন করিলে একটি মাত্র ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে।

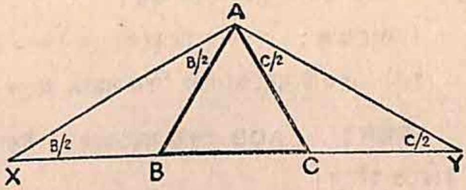
সম্পাদ্যের সমাধানে বিশ্লেষণ-পদ্ধতি

অনেক সময় সম্পাদ্যের অঙ্কন-প্রক্রিয়ার সংকেত পাইবার জন্য বিশ্লেষণ-পদ্ধতি অবলম্বন করিলে সমাধান সহজ হয়।

প্রথমে মনে করিয়া লও যে অঙ্কন-ক্রিয়া সম্পন্ন হইয়াছে। এক্ষণে প্রদত্ত উপাত্তগুলির কথা ভাব এবং উহাদের মধ্যে কোন জ্যামিতিক সম্বন্ধ পাওয়া যায় কিনা চেষ্টা করিয়া দেখ। একটু চিন্তা করিলেই এই সম্বন্ধ খুঁজিয়া পাইবে। তারপর এই সম্বন্ধ হইতে অঙ্কনক্রিয়া কিরূপে সম্পন্ন করিবে তাহার সন্ধান পাওয়া যাইবে। অপর পৃষ্ঠায় প্রদত্ত উদাহরণ দেখ।

সম্পাদ্য ঃ কোন ত্রিভুজের পরিসীমা ও দুইটি কোণ নির্দিষ্ট আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

বিশ্লেষণ ঃ ধর ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ। উপাত্তে পরিসীমা দেওয়া আছে। ত্রিভুজের ভূমি BC-কে উভয় দিকে বর্ধিত কর, যাহাতে BX = BA এবং CY = CA হয়। এখন দেখ স্পষ্টতঃই XY সরলরেখার দৈর্ঘ্য ত্রিভুজের পরিসীমার সমান।



এখন ভাব যে ত্রিভুজের কোণ দুইটিও দেওয়া আছে। দেখ পরিসীমা-নির্দেশক XY সরলরেখার সঙ্গে এই কোণদ্বয়ের কোন সম্বন্ধ পাওয়া যায় কিনা।

BX-কে AB-এর সমান করিয়া আঁকা হইয়াছে, অতএব $\angle AXB = \angle XAB$

আবার ত্রিভুজের ধর্মানুযায়ী $\angle AXB + \angle BAX = \angle ABC$

অর্থাৎ $\angle AXB = \frac{1}{2}\angle B$; অনুরূপ কারণে $\angle AYC = \frac{1}{2}\angle C$

এখন দেখিতেছ যে পরিসীমার সমান করিয়া কোন সরলরেখা টানিলে উহার প্রান্তবিন্দুদ্বয়ে ঐ রেখার সহিত যথাক্রমে প্রদত্ত কোণদ্বয়ের অর্ধ-পরিমাণ কোণ আঁকিলে ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর (A) অবস্থান জানা যাইবে।

আবার A বিন্দু হইতে AB, AC সরলরেখা কোন্ দিকে আঁকিতে হইবে তাহাও সুস্পষ্ট। কেননা $\angle XAB = \frac{1}{2}\angle B$ এবং $\angle YAC = \frac{1}{2}\angle C$.

অঙ্কন ঃ নির্দিষ্ট পরিসীমার সমান করিয়া XY রেখা লও ; X এবং Y বিন্দুতে নির্দিষ্ট কোণদ্বয়ের অর্ধেকের সমান করিয়া যথাক্রমে YXA, XYA কোণ দুইটি আঁক।

মনে কর, এই দুই কোণের বাহু A বিন্দুতে ছেদ করিল। A বিন্দুতে $\angle YXA$-এর সমান XAB কোণ এবং $\angle XYA$-এর সমান YAC কোণ অঙ্কন কর। এই কোণদ্বয়ের বাহু XY-কে যথাক্রমে B এবং C বিন্দুতে ছেদ করিলে $\triangle ABC$ উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে।

প্রমাণ ঃ বিশ্লেষণ হইতে অনায়াসেই লেখা যাইবে।

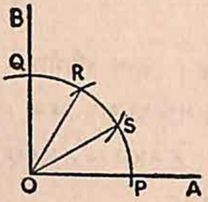
অনুশীলনী

1. (*i*) কোণ-চক্রের সাহায্য না লইয়া (ক) 60°, (খ) 30°, (গ) 75°, (ঘ) 105° কোণগুলি অঙ্কন কর।

[**সংকেত :** সমবাহু ত্রিভুজের যে-কোন কোণের মান 60°]

(*ii*) একটি সমকোণকে তিন সমান অংশে বিভক্ত কর।

অঙ্কন : ∠AOB প্রদত্ত সমকোণ। ইহাকে তিন সমান অংশে বিভক্ত করিতে হইবে।



O-কে কেন্দ্র করিয়া যে-কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ আঁক। এই চাপ OA, OB-কে যথাক্রমে P, Q বিন্দুতে ছেদ করিল। P ও Q-কে কেন্দ্র করিয়া একই ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি চাপ আঁক ; এই চাপ দুইটি পূর্ব চাপকে যথাক্রমে R ও S বিন্দুতে ছেদ করিল। OR ও OS যুক্ত কর।

তাহা হইলে OS এবং OR দ্বারা সমকোণটি সমান তিন অংশে বিভক্ত হইবে।

(প্রমাণ দাও)]

2. নিম্নে প্রদত্ত উপাত্ত হইতে ABC ত্রিভুজ অঙ্কন কর :—

(*i*)	$a=4·5$ সে. মি.	$b=3·2$ সে. মি.	$c=2·6$ সে. মি.
(*ii*)	$a=4·5$ সে. মি.	$c=2·6$ সে. মি.	B=30°
(*iii*)	$a=4·5$ সে. মি.	B=30°	C=70°
(*iv*)	$a=4·5$ সে. মি.	A=80°	B=30°
(*v*)	$a=4·5$ সে. মি.	$b=5$ সে. মি.	B=সমকোণ
(*vi*)	$a=3$ সে. মি.	$b=5$ সে. মি.	B=120°
(*vii*)	$a=3$ সে. মি.	$b=3·5$ সে.·মি.	B=30°
(*viii*)	$a=5$ সে. মি.	$b=2$ সে. মি.	B=30°
(*ix*)	$a=5$ সে. মি.	$b=2·5$ সে. মি.	B=30°
(*x*)	$a=5$ সে. মি.	$b=5$ সে. মি.	B=30°
(*xi*)	$a=5$ সে. মি.	$b=6$ সে. মি.	B=30°

3. (i) একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি ও পরিসীমা নির্দিষ্ট আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

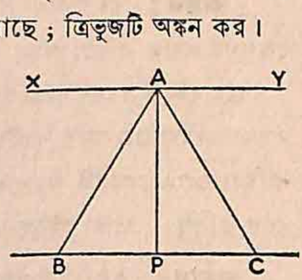
(ii) একটি সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা নির্দিষ্ট আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

4. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি ও উচ্চতা নির্দিষ্ট আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

5. একটি নির্দিষ্ট ভূমির উপর এরূপ একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন কর যাহার শিরঃকোণ একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান হইবে।

[**সংকেত** : ভূমি-সংলগ্ন কোণ শিরঃকোণের সম্পূরক কোণটির অর্ধাংশ।]

6. একটি সমবাহু ত্রিভুজের উচ্চতা নির্দিষ্ট আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।



[**সংকেত** : PA নির্দিষ্ট উচ্চতা। XAY ও BPC, PA-এর উপর লম্ব। এখন ∠XAB ও ∠YAC প্রত্যেকে 60° হইলে ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজটি হইবে]

7. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের উচ্চতা ও উহার শিরঃকোণ নির্দিষ্ট আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

8. কোন ত্রিভুজের ভূমি-সংলগ্ন দুই কোণ ও উচ্চতা নির্দিষ্ট আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। [প্রদত্ত উপাত্ত, B, C ও উচ্চতা h]

[Construct a triangle having given the base angles and the perpendicular from the vertex upon the base.]

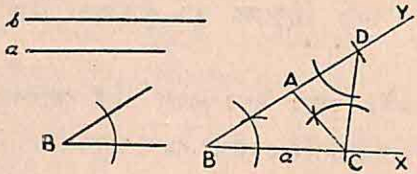
9. কোন ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ ও উচ্চতা নির্দিষ্ট আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। [প্রদত্ত উপাত্ত, a, B, h]

[Construct a triangle having given the base, one of the base angles and the perpendicular from the vertex on the base.]

10. কোন ত্রিভুজের ভূমি-সংলগ্ন একটি কোণ, অপর দুই বাহুর সমষ্টি ও উচ্চতা নির্দিষ্ট আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। [প্রদত্ত উপাত্ত B, $b+c$, h]

11. কোন ত্রিভুজের একটি বাহু, ঐ বাহু-সংলগ্ন একটি কোণ ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি নির্দিষ্ট আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

[প্রদত্ত উপাত্ত, a, B, $b+c$]



[**অঙ্কন :** যে-কোন সরলরেখা BX লও এবং XBY কোণটি নির্দিষ্ট B কোণের সমান করিয়া অঙ্কন কর।

BX হইতে a-এর সমান করিয়া BC অংশ এবং BY হইতে s $(=b+c)$-এর সমান করিয়া BD অংশ কাটিয়া লও। CD যুক্ত কর ; এখন ∠ADC-এর সমান করিয়া DCA কোণটি অঙ্কন কর। অঙ্কিত কোণের বাহুটি BY-কে A বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে।

প্রমাণ : ADC ত্রিভুজে, যেহেতু ∠ADC = ∠ACD ∴ AC = AD

∴ ABC ত্রিভুজে, BC $= a$ (অঙ্কন)

∠ABC = প্রদত্ত ∠B (অঙ্কন)

এবং BA + AC = BA + AD = BD $= s$

সুতরাং ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।]

12. কোন ত্রিভুজের একটি বাহু, ঐ বাহু-সংলগ্ন একটি কোণ ও অপর বাহুদ্বয়ের অন্তর নির্দিষ্ট আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

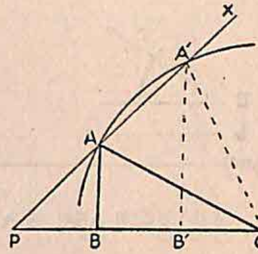
[প্রদত্ত উপাত্ত a, B, $b \sim c$]

13. একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ-সংলগ্ন একটি বাহু এবং অতিভুজ ও অপর বাহুর সমষ্টি নির্দিষ্ট আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

14. একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ-সংলগ্ন একটি বাহু এবং অতিভুজ ও অপর বাহুর অন্তর নির্দিষ্ট আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

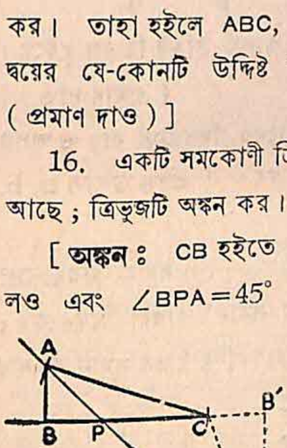
15. একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর দুইটি বাহুর সমষ্টি নির্দিষ্ট আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

[**অঙ্কন ঃ** নির্দিষ্ট সমষ্টির সমান করিয়া CP লও এবং $\angle CPX=45^\circ$ অঙ্কন কর ; C-কে কেন্দ্র করিয়া নির্দিষ্ট অতিভুজের সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কন করিলে ঐ চাপ PX-কে A ও A′ বিন্দুতে ছেদ করিল ; এখন AB, A′B′, PC-এর উপর লম্ব অঙ্কন কর। তাহা হইলে ABC, A′B′C ত্রিভুজ-দ্বয়ের যে-কোনটি উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে। (প্রমাণ দাও)]



16. একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর দুই বাহুর অন্তর নির্দিষ্ট আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

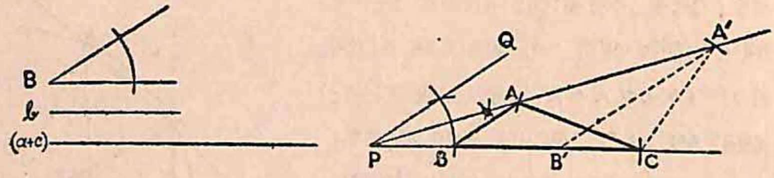
[**অঙ্কন ঃ** CB হইতে নির্দিষ্ট অন্তরের সমান করিয়া CP অংশ কাটিয়া লও এবং $\angle BPA=45^\circ$ আঁক। C-কে কেন্দ্র করিয়া নির্দিষ্ট অতিভুজের সমান ব্যাসার্ধ লইয়া চাপ অঙ্কন করিলে ঐ চাপ PA-কে A বিন্দুতে এবং বর্ধিত AP-কে A′ বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন PC-কে বর্ধিত করিয়া উহার উপর AB ও A′B′ লম্ব অঙ্কন করিলে ABC ও A′B′C ত্রিভুজদ্বয়ের যে-কোনটি উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে। (প্রমাণ দাও)]



17. কোন ত্রিভুজের একটি কোণ, ঐ কোণের বিপরীত বাহু ও অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি নির্দিষ্ট আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। [প্রদত্ত উপাত্ত B, b, $a+c$]

[**অঙ্কন ঃ** নির্দিষ্ট সমষ্টি ($a+c$)-এর সমানে করিয়া PC লও এবং $\angle CPQ=$প্রদত্ত $\angle B$ আঁক ; $\angle CPQ$-কে দ্বিখণ্ডিত কর ; C-কে কেন্দ্র করিয়া

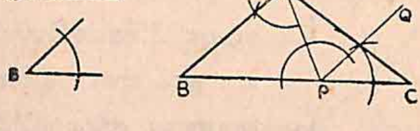
নির্দিষ্ট বাহু b-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া চাপ অঙ্কন করিলে এই চাপ দ্বিখণ্ডককে A ও A′ বিন্দুতে ছেদ করিল ; এখন AB ও A′B′, PQ-এর সমান্তরাল করিয়া অঙ্কন কর।



তাহা হইলে ABC ও A′B′C′ ত্রিভুজদ্বয়ের যে-কোনটি উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে। (প্রমাণ দাও)]

18. কোন ত্রিভুজের একটি কোণ, ঐ কোণের বিপরীত বাহু ও অপর বাহুদ্বয়ের অন্তর নির্দিষ্ট আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। [প্রদত্ত উপাত্ত B, b, $a \sim c$]

[**অঙ্কন :** CB হইতে নির্দিষ্ট অন্তরের ($d = a \sim c$) সমান করিয়া CP অংশ কাটিয়া লও এবং ∠CPQ নির্দিষ্ট কোণের সমান করিয়া অঙ্কন কর ; ∠QPB-কে দ্বিখণ্ডিত কর ; C-কে কেন্দ্র করিয়া নির্দিষ্ট বাহুর সমান ব্যাসার্ধ



লইয়া চাপ অঙ্কন করিলে এই চাপ দ্বিখণ্ডককে A বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন PQ-এর সমান্তরাল করিয়া AB অঙ্কন কর। তাহা হইলে ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে। (প্রমাণ দাও)]

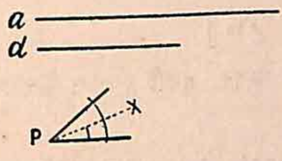
19. ত্রিভুজের ভূমি, অপর দুই বাহুর সমষ্টি ও ভূমি-সংলগ্ন কোণ দুইটির অন্তর দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। [প্রদত্ত উপাত্ত a, B − C, $b+c$]

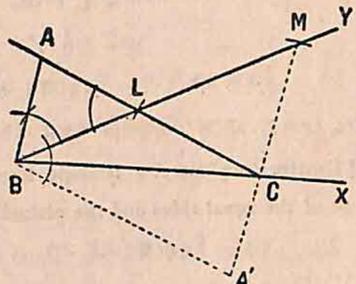
[Construct a triangle having given the base, the sum of the other two sides and the difference of the base angles.]

20. কোন ত্রিভুজের ভূমি, অন্য দুই বাহুর অন্তর এবং ভূমি-সংলগ্ন কোণ দুইটির অন্তর দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। ($a, b \sim c$, B ~ C)

[Construct a triangle having given the base, the difference of the other two sides and the difference of the base angles.]

[a প্রদত্ত ভূমি, d নির্দিষ্ট অন্তর ($b \sim c$), ∠P ভূমি-সংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর (B ~ C)





অঙ্কন ঃ যে-কোন সরলরেখা BX হইতে ভূমি a-এর সমান করিয়া BC অংশ কাটিয়া লও ; প্রদত্ত কোণদ্বয়ের অন্তর P-কে দ্বিখণ্ডিত করিয়া ∠CBY = ½ ∠P অঙ্কন কর ; C-কে কেন্দ্র করিয়া নির্দিষ্ট বাহুদ্বয়ের অন্তর d-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া চাপ আঁকিলে এই চাপ BY-কে L ও M বিন্দুতে ছেদ করিল। CL ও CM যুক্ত করিয়া বর্ধিত কর, B বিন্দুতে ∠LBA = ∠BLA এবং ∠MBA′ = ∠BMA′ অঙ্কন কর। তাহা হইলে ABC ও A′BC ত্রিভুজদ্বয়ের যে-কোনটি উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে।

প্রমাণ ঃ (i) △ABC-এ, BC = প্রদত্ত ভূমি a

AC − AB = AC − AL (∠ABL = ∠ALB বলিয়া AL = AB)

= CL = নির্দিষ্ট অন্তর d

∠ABC − ∠ACB = ∠ABL + ∠LBC − ∠ACB

= ∠ALB + ∠LBC − ∠ACB

= (∠LCB + ∠LBC) + ∠LBC − ∠LCB

= 2 ∠LBC = 2 × ½ ∠P = প্রদত্ত ∠P

(*ii*) $\triangle A'BC$-এ, BC = প্রদত্ত ভূমি d

$A'B - A'C = A'M - A'C = CM =$ নির্দিষ্ট অন্তর d

$$\angle A'CB - \angle A'BC = (\angle BMC + \angle MBC) - \angle A'BC$$
$$= (\angle MBA' + \angle MBC) - \angle A'BC$$
$$= 2\angle MBC + \angle A'BC - \angle A'BC$$
$$= 2\angle MBC$$
$$= 2 \times \tfrac{1}{2}\angle P = \text{প্রদত্ত } \angle P \,]$$

21. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি এবং অপর একটি বাহু ও উচ্চতার অন্তর দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

[Construct an isosceles triangle having given the base and the difference of one of the equal sides and the altitude.]

22. একটি ত্রিভুজের দুই বাহু ও তৃতীয় বাহুর দ্বিখণ্ডক মধ্যমা দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

[Construct a triangle having given the two sides and the median on the third side.]

23. একটি ত্রিভুজের ভূমি, উচ্চতা ও ভূমির দ্বিখণ্ডক মধ্যমা দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

[Construct a triangle having given the base, altitude and the median bisecting the base.]

———

পরিশিষ্ট

বিবিধ প্রশ্নাবলী

[প্রবেশিকা ও স্কুল ফাইনাল পরীক্ষার প্রশ্নপত্র হইতে গৃহীত]

1. (*a*) Two right-angled triangles have their hypotenuses equal and one side of one equal to one side of the other ; show that the triangles are equal in all respects. [Theor. 12].

(*b*) Any point on the bisector of an angle is equidistant from the arms of the angle. Prove this.

2. (*a*) If one side of a triangle be produced, the exterior angle is equal to the sum of two interior opposite angles ; the sum of three interior angles is equal to two right angles. [Theor. 6, 5]

(*b*) Find the magnitude of an angle of a regular hexagon.

3. (*a*) Prove that the angles at the base of an isosceles triangle are equal. [Theor. 9]

(*b*) Prove that the triangle formed by joining the midpoints of the sides of an isosceles triangle is isosceles. [Page 187 (11)]

4. (*a*) Prove that the sum of the three interior angles of a triangle is equal to two right angles. [Theor. 5]

(*b*) Prove that an isosceles triangle will be equilateral if any one of its angles be equal to 60°.

5. Construct a triangle having given the lengths of three sides. [Prob. 7]

6. Construct a triangle having given the base, one of the angles at the base and the perpendicular from the vertex upon the base. [Page 185 (9)]

7. (*a*) Show that any two sides of a triangle are together greater than the third side. [Theor. 15]

(*b*) Show that the difference of any two sides of a triangle is less than the third side. [Page 145 (1)]

8. (*a*) Prove that the sum of the three angles of a triangle is equal to two right angles. [Theor. 5]

(*b*) One angle of a triangle is twice the sum of the other two angles. Determine the magnitude of the angle. [Page 16 (9)]

9. Construct a triangle having given the perimeter and two angles. (Traces of construction only are required.) [Page 183]

10. (*a*) Prove that if one side of a triangle is produced, the exterior angle is greater than either of the interior opposite angles. [Theor. 6 (Cor.)]

(b) ABC is a triangle and D is any point within it. If BD and CD are joined, show that the angle BDC is greater than the angle BAC.

11. (a) Prove that the sum of the angles of a triangle is equal to two right angles. [Theor. 5]

(b) If each side of a triangle is produced both ways, show that the sum of all the six exterior angles is equal to eight right angles.

12. (a) Prove that any two sides of a triangle are together greater than the third. [Theor. 15]

(b) Prove that the sum of the sides of a triangle is greater than the sum of its medians. [Page 149 (10)]

13. (a) Prove that if two angles of a triangle are equal, the sides opposite to them are equal. [Theor. 10]

(b) If in a triangle, the perpendiculars drawn from the extremities of the base to the opposite sides are equal, show that the triangle is isosceles. [Page 153 (17)]

14. (a) If one side of a triangle is produced, prove that the exterior angle formed is equal to the sum of the interior opposite angles. [Theor. 6]

(b) Show that the angle contained by the bisectors of two adjacent angles of a quadrilateral is half the sum of the remaining angles of the quadrilateral. [Page 131 (14)]

15. From two points on the same side of a given line, draw two straight lines to meet on the given line and to be equally inclined to it. [Page 168 (5)]

16. Construct a triangle having given two angles and the perimeter. [Page 188]

17. Construct an isosceles triangle having given the base and the vertical angle. [Page 185 (5)]

18. Given the altitude and the two base angles : Construct the triangle. (Page 185 (8))

জ্যামিতি
প্রবেশ